

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. А. И. ГЕРЦЕНА»

На правах рукописи

Фролова Марина Витальевна

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕОСОКРАТИЧЕСКОГО ДИАЛОГА ПРИ ОБУЧЕНИИ
СТЕРЕОМЕТРИИ УЧАЩИХСЯ КЛАССОВ С УГЛУБЛЕННЫМ
ИЗУЧЕНИЕМ МАТЕМАТИКИ

5.8.2. Теория и методика обучения и воспитания
(математика, математика и механика (среднее общее образование))
(педагогические науки)

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук

Научный руководитель:
доктор педагогических наук, профессор
Стефанова Наталия Леонидовна

Санкт-Петербург
2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НЕОСОКРАТИЧЕСКОГО ДИАЛОГА ПРИ ОБУЧЕНИИ СТЕРЕОМЕТРИИ УЧАЩИХСЯ КЛАССОВ С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ МАТЕМАТИК.....	22
§1 Содержание понятия «неосократический диалог» в обучении	23
§2 Особенности использования неосократического диалога при обучении стереометрии учащихся классов с углубленным изучением математики.....	42
§3 Роль неосократического диалога для развития учебно-исследовательских умений при обучении стереометрии учащихся классов с углубленным изучением математики.....	57
§4 Частично открытые задачи как средство использования неосократического диалога при обучении стереометрии учащихся классов с углубленным изучением математики.....	71
Выводы по главе I.....	85
Глава II. МЕТОДИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НЕОСОКРАТИЧЕСКОГО ДИАЛОГА ПРИ ОБУЧЕНИИ СТЕРЕОМЕТРИИ УЧАЩИХСЯ КЛАССОВ С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ МАТЕМАТИКИ.....	89
§5 Отбор типов частично открытых задач для использования неосократического диалога при обучении стереометрии учащихся классов с углублённым изучением математики.....	90
§6 Основные положения методики использования неосократического диалога при обучении стереометрии учащихся классов с углубленным изучением математики	100
§7 Методика изучения темы «Углы в пространстве» с использованием неосократического диалога.....	117
§8 Методика проведения и результаты экспериментального исследования.....	127
Выводы по главе II.....	146

Заключение	148
Библиография.....	153
Приложения	178

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Действующие нормативы ФГОС СОО ставят перед школой задачу воспитать выпускника, который сам ищет знания, умеет работать в команде, а также способен провести собственное исследование. Решить такую задачу можно, применяя коммуникативно-ориентированные методики при организации учебно-исследовательского процесса.

В педагогической литературе, вслед за И. В. Клещевой, А. В. Леонтовичем, А. С. Обуховым, А. И. Савенковым и др., принято различать исследовательскую и учебно-исследовательскую деятельность. Так, исследовательская деятельность в классическом понимании нацелена на объективно новый результат, значимый для науки, а цель учебно-исследовательской деятельности связана с самим учащимся, то есть с формированием субъективно нового результата, в частности с формированием учебно-исследовательских умений.

В свою очередь концепция развития математического образования выделяет формирование коммуникативных умений как важную составляющую образовательного процесса, подчёркивая необходимость развития у школьников способности вести дискуссии, аргументировать свои идеи и осуществлять самостоятельный поиск решения поставленных задач.

Диалогическая организация урока может стать эффективным ресурсом для формирования и развития учебно-исследовательских умений учащихся, однако требуется методически выверенный вариант диалога, адаптированный к математическому содержанию. В методике обучения математике диалоговое обучение традиционно связывают с проблемным диалогом (М. И. Махмутов, Е. Л. Мельникова и др.) и эвристической беседой (А. В. Хуторской, Л. С. Капкаева и др.) при организации обсуждения хода доказательства или количества способов решения задачи.

Важнейшим индикатором качественного диалогического обучения выступают содержательные математические вопросы, инициируемые

учащимися, то есть такие вопросы, которые направлены на выявление существенных свойств объекта, установление связей, обоснование границ применимости. В педагогической литературе проблема формирования умения задавать вопросы имеет давнюю традицию. Так, ещё К. Д. Ушинский рассматривали её как важнейший компонент развития познавательной самостоятельности, а в современной методике это направление активно разрабатывается в рамках технологии развития критического мышления (приёмы «Ромашка Блума», «Толстые и тонкие вопросы»), ТРИЗ-педагогики (Г. С. Альтшуллер, А. А. Гин, А. Б. Селюцкий и др.) и исследовательского обучения (Дж. П. Гилфорд, А. И. Савенков и др.). В методике обучения математике целенаправленное формирование умения задавать вопросы разрабатывалось в нескольких направлениях. Так, М. С. Рябова предложила систему вопросно-ответных процедур, обучающую учащихся постановке вопроса и формулированию ответа, что смещает акцент с контролирующей функции вопросов на развивающую. Н. С. Майкова в своём исследовании рассматривает провоцирующие задачи как средство предупреждения ошибок, выделяя типы провокаций, связанные с формулировкой вопросов («Верно ли, что...?», «Можно ли...?») и противоречиями в условии.

Также важнейшей составляющей учебно-исследовательской деятельности является выдвижение обоснованных гипотез. Одним из возможных методических приёмов, способствующих вовлечению учащихся в процесс выдвижения гипотез, может выступать постановка учителем неоднозначных вопросов, провоцирующих столкновение различных точек зрения. Такой особенностью обладает, в частности, несократический диалог – вид группового учебного взаимодействия, при которой учитель, воздерживаясь от содержательных оценок, направляет участников к самостоятельному обобщению их коллективного опыта через анализ конкретных примеров и последовательную рефлексия используемых понятий.

История использования несократического диалога в обучении восходит к традиции, заложенной немецким философом

Леонардом Нельсоном (1882- 1927). В докладе 1922 года он предложил переосмыслить античную практику как метод, обучающий философствованию, при котором учитель отказывается от «обучающих суждений», а участники через анализ собственного опыта и процедуру «регрессивной абстракции» самостоятельно приходят к обобщающим выводам. Регрессивная абстракция представляет собой движение мысли от конкретных, эмпирически данных суждений к их неявным общим предпосылкам, от частных случаев к универсальным принципам. Стоит отметить, что сам Л. Нельсон использовал термин «сократический метод», рассматривая себя как возродителя именно сократовской традиции. Идеи Л. Нельсона получили развитие в работах его ученика Густава Хекмана (1898- 1996), который адаптировал метод для педагогической практики, сформулировав «шесть педагогических мер», представляющих правила ведения диалога, ориентированные на взаимопонимание и достижение консенсуса в группе.

Таким образом, в методической науке для отделения данной традиции от исторического диалога Сократа и выделения методических находок последователей используется понятие «неосократический диалог». При этом многие исследователи продолжают использовать понятие «сократический диалог», имея в виду именно ту его форму, которая принадлежит Нельсону-Хекману. Такая терминологическая нестрогость отражает сложившуюся практику: в фундаментальных работах Х. Гронке, Д. Крона, Г. Раупах-Штрей, и др. последовательно используется понятие «сократический диалог», тогда как для акцента на методических отличиях от античного образца они обращаются к понятию «неосократический диалог». В отечественной педагогике возможности сократического диалога рассматривались в работах А. А. Марголиса, В. В. Рубцова, М. В. Телегина, Е. В. Гусевой, Н. Г. Егошиной и др.

Применение неосократического диалога в обучении математике остаётся малоизученным в отечественной педагогике, что препятствует целостному

осмыслению его особенностей. Данное обстоятельство обуславливает актуальность настоящего исследования и необходимость разработки методики, адаптирующей неосократический диалог к задачам обучения стереометрии в классах с углублённым изучением математики.

Общеизвестно, что в основе обучения математике лежит задачный подход (Ю. М. Колягин, Л. М. Фридман и др.), поэтому логично связать диалоговую форму с особым типом задач, например, частично открытыми (П. М. Горев, В. В. Утёмов и др.), так как такие задачи допускают вариативность в интерпретации условия и/или заключения за счёт неполноты данных, создавая пространство для выдвижения и проверки гипотез.

На базовом уровне изучения геометрии ФГОС СОО ставит перед учителем две задачи. Нужно развивать у учащихся доказательные рассуждения и учить их распознавать геометрические фигуры на чертежах, и в реальной жизни. Эффективное обучение математике на углубленном уровне включает в себя развитие умений, предъявляемых к базовому уровню обучения, но при этом требует и сформированности представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений, а также умения исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат. При изучении стереометрии у учащихся типичны трудности, связанные с пространственным воображением и выбором стратегии доказательства.

Одним из эффективных средств преодоления указанных трудностей выступают опорные конструкции – геометрические конфигурации, визуализирующие ключевые соотношения между элементами пространственной фигуры (В. В. Орлов, С. И. Кийко, О. Н. Щепин и др.).

Работа с частично открытой задачей на этапе систематизации и обобщения знаний, влекущая за собой создание опорной конструкции органично сочетается с технологией варьирования (А. А. Смирнова, Н. В. Токунова, Н. В. Насикан и др.). Варьирование условия или заключения позволяет изменять геометрическую конфигурацию и тем самым инициирует

полноценное учебное исследование (И. В. Клещева, Н. Л. Стефанова, Л. Н. Тимофеева и др.).

Исследования показывают (В.П. Иржавцева, Л.Я. Федченко и др.), что даже в классах с углублённым изучением математики этапу систематизации и обобщения часто не уделяется достаточного внимания. Между тем именно на этом этапе происходит установление связей между элементами знания, без чего невозможно формирование целостной системы представлений о геометрических объектах. Необходима такая организация учебного процесса, где самостоятельное выявление этих связей становится ведущей деятельностью учащихся. Данную цель можно достичь с использованием несократического диалога при обучении стереометрии. В ходе его использования учащиеся через коллективное обсуждение частично открытой задачи приходят к созданию или модификации опорной стереометрической конструкции, фиксирующей существенные связи между элементами геометрической фигуры. Таким образом, несократический диалог выступает средством учебного исследования, результатом которого становится обобщённое знание, выстроенное вокруг опорной конструкции.

Так, проведённый анализ научно-педагогических и методических источников, а также нормативных документов в сфере образования позволил зафиксировать ряд сложившихся **противоречий**:

- между подтвержденными результатами современных исследований, посвященных эффективности и перспективности диалоговых методов в обучении в целом, и заметным недостатком частных диалоговых методик, специально адаптированных для негуманитарных дисциплин, в частности математики, для обучения как на базовом, так и на углубленном уровне;

- между доказанной эффективностью использования несократического диалога в обучении и отсутствием его систематического применения при углубленном обучении математике;

- между требованиями ФГОС СОО о необходимости формирования у учащихся активной учебно-познавательной позиции, развития учебно-

исследовательских умений, умения сотрудничать, обучения доказательным рассуждениям и исследованию моделей в геометрии, и недостаточной разработанностью соответствующих комплексных методик особенно для классов с углублённым изучением математики;

- между ориентацией на высокие результаты единого государственного экзамена у учащихся классов с углублённым изучением математики и фактическим уровнем этих результатов, сниженным в том числе за счёт стереометрической задачи второй части.

Перечисленные противоречия определяют **актуальность** нашего исследования. **Проблема** исследования заключается в поиске эффективных видов диалогового взаимодействия при обучении геометрии в классах с углублённым изучением математики для организации учебно-исследовательской деятельности.

Обозначенная проблема позволила сформулировать **цель** настоящего исследования, состоящую в уточнении содержания понятия «неосократический диалог» применительно к обучению стереометрии и разработке методики использования этого вида диалога при решении стереометрических задач с учащимися классов с углубленным изучением математики.

Проблема исследования задаёт его **объект**. В нашем случае это процесс обучение стереометрии учащихся классов с углублённым изучением математики. **Предмет** исследования выступает неосократический диалог как инструмент организации учебно-исследовательской деятельности учащихся в процессе решения стереометрических задач и методика его использования в классах с углубленным изучением математики.

Гипотеза исследования состоит в том, что если использовать разработанную методику применения неосократического диалога при решении частично открытых стереометрических задач на этапе систематизации и обобщения знаний, то это будет способствовать:

а) развитию у учащихся учебно-исследовательских умений: формулировать гипотезу о свойствах пространственной конструкции, задавать содержательный математический вопрос, выявлять противоречие в ходе решения математической (стереометрической) задачи, обобщать полученные данные, делать выводы;

б) развитию у учащихся коммуникативных умений: аргументировано и последовательно строить устное математическое рассуждение, воспринимать иное математическое рассуждение с проверкой на непротиворечивость;

в) повышению качества овладения стереометрическим материалом.

Показатели повышения качества овладения стереометрическим материалом:

- увеличение количества учащихся, верно решивших стереометрические задачи;

- использование опорной стереометрической конструкции для решения задачи;

- модификация опорной конструкции в новой ситуации с целью последующего обобщения.

Задачи исследования вытекают из его цели, предмета и гипотезы:

1. Изучить философскую, психолого-педагогическую и методическую литературу, посвящённую сократическому и несократическому диалогам. Определить, какие возможности эти виды диалога открывают для современного математического образования.

2. Уточнить содержание понятия «несократический диалог», его место в системе видов диалогового взаимодействия и определить его специфику при обучении стереометрии;

3. Изучить практику использования диалогового обучения в школах с углубленным изучением математики, выявить трудности и готовность учащихся такому обучению;

4. Уточнить содержание понятия «частично открытая задача», выделить типы и обосновать их применение в качестве средства использования неосократического диалога;

5. Разработать набор методических средств (схему ведения неосократического диалога, наборы разных типов частично открытых стереометрических задач по всем темам школьного курса стереометрии, фрагменты неосократических диалогов) и методику их использования;

6. Осуществить проверку эффективности методики в ходе опытно-экспериментальной работы. Она включает констатирующий, поисковый и формирующий этапы. После завершения каждого этапа провести анализ собранных данных.

Работу над задачами исследования обеспечивал **набор методов**, дополняющих друг друга. К теоретическим методам относились изучение философской, психолого-педагогической, методической литературы, а также анализ нормативных документов. К эмпирическим – анкетирование, опрос, тестирование, беседа, педагогическое наблюдение и педагогический эксперимент. Статистическая обработка данных велась с помощью критерия χ^2 Пирсона и t-критерия Стьюдента, дополненных количественным и качественным анализом.

Степень научной разработанности темы исследования. Методологическую основу исследования составляют научные положения, основанные на:

– педагогике и дидактике (Бабанский Ю. К., Блум Б. С., Загвязинский В. И., Краевский В. В., Кратволь Д. Р., Кукушин В. С., Лернер И. Я., Подласый И. П., Пышкало А. М., Селевко Г. К., Сластенин В. А. и др.)

– методике обучения математике (Александров А. Д., Атанасян Л. С., Бескин Н. М., Боженкова Л. И., Бурменская Г. В., Вернер А. Л., Груденов Я. И., Гусев В. А., Епишева О. Б., Ермак Е. А., Колмогоров А. Н., Колягин Ю. М., Лисимова О. А., Орлов В. В.,

Погорелов А. В., Подходова Н. С., Пойа Д., Рыжик В. И., Саранцев Г. И., Сенькина Г. Е., Снегурова В. И., Стефанова Н. Л., Столяр А. А., Тестов В. А., Фридман Л. М., Эрдниев П. М. и др.)

– системно-деятельностном подходе (Ананьев Б. Г., Выготский Л. С., Гальперин П. Я., Давыдов В. В., Леонтьев А. Н., Рубинштейн С. Л., Талызина Н. Ф., Эльконин Д. Б. и др.)

– методике обучения диалоговым методам (проблемный, эвристический и др.): (Аганисян В. М., Адамар Ж., Асташова Н. А., Бахтин М. М., Библер В. С., Витгенштейн Л., Гасова О. В., Дьюи Д., Ермолаева Е. Б., Каган М. С., Капкаева Л. С., Козловская Е. А., Курганова С. Ю., Лернер И. Я., Матюшкин А. М., Махмутов М. И., Мельникова Е. Л., Менчинская Н. А., Носова К. Д., Пойа Д., Хуторской А. В. и др.)

– исследовательском подходе (Афанасьев В. В., Бочкарева Д. В., Далингер В. А., Десницкая В. В., Клещева И. В., Майер В. Р., Савенков А. И., Самарский А. А., Сгибнев А. И., Стефанова Н. Л., Тимофеева Л. Н., Шабанова М. В., Ястребов А. В. и др.)

– задачном подходе (Балл Г. А., Болтянский В. Г., Будикина А. Е., Виленкин Н. Я., Горев П. М., Груденов И. Я., Гусев В. А., Далингер В. А., Дорофеев Г. В., Зыков И. С., Изаак Д. Ф., Канин Е. С., Клековкин Г. А., Колягин Ю. М., Кудрявцев Л. Д., Ларькина Е. В., Мордкович А. Г., Нагибин Ф. Ф., Овсянникова И. С., Орлов В. В., Орлова Л. Э., Саранцев Г. И., Сафуанов И. С., Токмазов Г. В., Успенский В. В., Утемов В. В., Фридман Л. М., Хуторской А. В., Цукарь А. Я., Шикова Л. Р., Шулаева Н. А. и др.)

– нормативно-правовых документах об образовании (ФЗ «Об образовании в Российской Федерации», Концепция развития математического образования Российской Федерации и др.).

Организация и основные этапы исследования

Исследование проводилось в 2022-2025 гг. и включало три этапа.

Первый этап (2022-2023 гг.) носил констатирующий характер. Его задачей стало выявление и фиксация проблемы исследования. На данном этапе был проведён анализ философских, психолого-педагогических и методических источников, раскрывающих различные аспекты диалогового обучения и учебно-исследовательской деятельности учащихся классов с углублённым изучением математики. Отдельно изучался реальный опыт организации уроков в диалоговой форме. Также были определены цель, задачи и гипотеза исследования, разработаны основные теоретические положения. Заметим, что именно на этом этапе уточнялась место использования неосократического диалога в процессе обучения математике.

Второй этап (2023-2024 гг.) был связан с поисковой экспериментальной работой. Она была направлена на отбор и уточнение приёмов включения неосократического диалога в процесс обучения математике. Этот этап позволил конкретизировать ведущие направления методики и уточнить гипотезу. Тогда же появились методические материалы. Был собран набор частично открытых стереометрических задач. Для учителя подготовили методические рекомендации. Методика прошла предварительную апробацию.

На третьем этапе (2024-2025 гг.) проводился формирующий эксперимент. Его цель состояла в практическом внедрении разработанной методики использования неосократического диалога в классах с углублённым изучением математики при обучении стереометрии. Опытно-экспериментальная часть работы велась с привлечением контрольных и экспериментальных групп. Полученные данные были обработаны статистически. После этого диссертация получила литературное оформление.

Опытно-экспериментальная работа проводилась в ведущих образовательных учреждениях Санкт-Петербурга в классах с углубленным изучением математики: в СУНЦ «Академическая гимназия им. Д. К. Фаддеева СПбГУ», ГБОУ Гимназия № 261, ФМЛ № 366, ФМЛ № 30, ФТШ им. Ж. И. Алферова, ГБОУ Гимназия №526.

Научная **новизна** исследования.

1. Уточнено понятие «несократический диалог» и обоснована целесообразность и возможность его использования при обучении математике. Несоократический диалог представляет собой групповое обсуждение, в котором учитель, занимая позицию сдержанного фасилитатора, организует сопоставление суждений, выдвигаемых самими учащимися. С помощью вопросов он фиксирует противоречия между этими суждениями, возвращает участникам их собственные формулировки и побуждает к проверке гипотез. Результатом такого обсуждения становится система обобщённого знания, выстроенная и зафиксированная учащимися на основе сопоставления собственных позиций.

2. Несоократический диалог при обучении стереометрии в классах с углублённым изучением математики представляет собой вид учебного диалога, который начинается с общего неоднозначного вопроса, инициированного частично открытой стереометрической задачей. Такой вопрос не предполагает единственно верного ответа, в связи с чем учащиеся самостоятельно анализируют геометрическую ситуацию, выдвигают гипотезы, проверяют их. По ходу обсуждения учитель приводит учащихся к противоречию между тем, что следует из стереометрической теории, и из уже выдвинутых ранее утверждений. Обнаружение этих противоречий и становится движущей силой диалога. Завершается несоократический диалог тем, что учащиеся обобщают уже имеющиеся знания, устанавливают связи между ними, и оформляют это в виде опорной стереометрической конструкции.

3. Разработана методика использования несоократического диалога на уроках стереометрии в классах с углублённым изучением математики. Её специфика проявляется в трёх аспектах. Во-первых, средством обучения выступают частично открытые стереометрические задачи. Во-вторых, сам процесс строится на сопоставлении образа пространственной конструкции, её логического обоснования и выдвигаемыми гипотезами учащихся и, как следствие, обнаружении между ними противоречий. В-третьих, результат

диалога состоит в создании опорной стереометрической конструкции, в которой фиксируются существенные связи между элементами фигуры. Эта конструкция затем служит основой для обобщения знаний.

4. Разработан набор методических средств для использования неосократического диалога при обучении геометрии в классах с углубленным изучением математики, включающий схему и методические предписания по ведению диалога, наборы частично открытых стереометрических задач различных видов по всем темам школьного курса стереометрии, а также фрагменты неосократических диалогов, построенные на материале этих задач, и показана его реализация на примере темы «Углы в пространстве».

5. Впервые экспериментально доказано, что использование неосократического диалога при работе с частично открытыми стереометрическими задачами на этапе систематизации и обобщения знаний развивает учебно-исследовательские (постановка содержательных математических вопросов, выявление противоречий в суждениях, осознание необходимости аргументации, формулировка гипотезы, умение обобщать и систематизировать полученные данные, формулировать выводы) и коммуникативные (аргументировано и последовательно строить устное математическое рассуждение, воспринимать иное математическое рассуждение с проверкой на непротиворечивость) умения и способствует повышению качества предметных знаний за счет создания опорной стереометрической конструкции и дальнейших её модификаций, обобщающих имеющиеся знания и устанавливающих связи между ними.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что:

- обоснована актуальность диалогового обучения, направленного на учебно-исследовательскую деятельность при работе с учащимися классов с углубленным изучением математики;
- уточнено содержание понятия «неосократический диалог» на основе анализа философских первоисточников и общепедагогических исследований;

- уточнено содержание понятия «частично открытая задача», выделены типы частично открытых задач;

- неосократический диалог рассмотрен как средство развития учебно-исследовательских умений учащихся классов с углублённым изучением математики; выявлены, теоретически обоснованы и охарактеризованы предпосылки его применения в процессе решения частично открытых задач.

Практическая значимость исследования состоит в том, что:

- для организации обучения учащихся с применением неосократического диалога подготовлены и внедрены учебно-методические материалы, включающие схему и предписания его использования, а также фрагменты диалогов на материале разработанных частично открытых стереометрических задач;

- выделены и охарактеризованы типы частично открытых задач для реализации неосократического диалога, приведены примеры работы с ними;

- создан набор частично открытых стереометрических задач (по всем темам школьного курса стереометрии), как основное средство инициирования и сопровождения неосократического диалога;

- разработан диагностический инструментарий для выявления уровня сформированности учебно-исследовательских и коммуникативных умений учащихся в процессе диалогового обучения;

Достоверность и обоснованность результатов исследования определяются положительными результатами четырёхлетней поэтапной экспериментальной работы и апробации, корректным подбором методов, соответствующих объекту, предмету, целям и задачам исследования, системным анализом литературы, а также профессиональным опытом соискателя как преподавателя РГПУ им. А. И. Герцена.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Неосократический диалог при обучении стереометрии представляет собой вид учебного диалога, который начинается с общего

неоднозначного вопроса, инициированного частично открытой стереометрической задачей. Его цель заключается в развитии у учащихся умений самостоятельно анализировать геометрическую ситуацию, выдвигать и проверять гипотезы, обнаруживать противоречия между наглядным образом пространственной конфигурации и её логическим обоснованием. Результатом такого диалога становится обобщение имеющихся знаний через установление связей между ними, которые оформляются в виде опорной стереометрической конструкции.

2. Методика использования несократического диалога при работе с частично открытыми стереометрическими задачами включает две фазы: анализ условия и работа на заключительном этапе. Работа в каждой фазе предполагает пять последовательных шагов: постановка задачи, выявление неопределённости, выдвижение гипотез, проверка гипотез, вывод. Каждому шагу соответствует тип вопроса учителя: уточняющий, направляющий, гипотетический, критический, обобщающий. Первая фаза завершается созданием опорной конструкции, обобщающей все непротиворечивые гипотезы. Вторая фаза представляет собой варьирование опорной конструкции, исследование изменения параметров условия или заключения, выявление инвариантных свойств и формулирование обобщения, охватывающего целый класс ситуаций. Средством инициирования и сопровождения диалога выступают частично открытые задачи типов III–V, отобранные в соответствии с предложенной типизацией по характеру учебного действия, выполняемого учащимся при работе с неопределённостью.

3. Использование разработанной методики применения несократического диалога на уроках стереометрии при решении частично открытых стереометрических задач на этапе систематизации и обобщения знаний приводит к развитию у учащихся учебно-исследовательских умений (выдвижение гипотез о свойствах пространственной конструкции, постановка содержательных математических вопросов, обнаружение противоречий в ходе решения стереометрической задачи, умение обобщать полученные данные и

формулировать выводы) и коммуникативных (аргументировано и последовательно строить устное математическое рассуждение, воспринимать иное математическое рассуждение с проверкой на непротиворечивость) умений, а также к повышению качества овладения стереометрическим материалом.

Апробация результатов исследования осуществлялась с 2022 по 2026 год.

Первые итоги были представлены на Международной научной конференции «75-е Герценовские чтения: Современные проблемы математики и математического образования» (2022). В дальнейшем материалы докладывались на Всероссийских съездах математических центров (2023, 2024), городском семинаре учителей математики ПОМИ им. А. В. Стеклова (2024), методологическом семинаре кафедры методики обучения математики РГПУ им. А. И. Герцена (2024-2026), международной научной конференции 77 - 79-е Герценовские чтения: Современные проблемы математики и математического образования» (2024-2026) и Петербургском международном образовательном форуме (2025, 2026).

Основные положения диссертационного исследования отражены в следующих публикациях:

1. **Фролова, М.В. Метод несократического диалога как элемент предметно-коммуникативной культуры современного учителя математики / Н.Л. Стефанова, М.В. Фролова // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2025. – № 10 (октябрь). – С. 135-148.**
2. **Фролова, М.В. Развитие исследовательских умений учащихся классов с углубленным изучением математики на основе метода несократического диалога / М.В. Фролова // Учебный эксперимент в образовании. – 2025. – № 4 (116). – С. 118-127. – DOI: 10.51609/2079-875X_2025_4_116.**

3. **Фролова, М.В. Методы диалогового взаимодействия современного учителя математики: проблемный и несократический / М.В. Фролова // Педагогическое образование в России. – 2026. – № 2. – С. 332-342.**

4. Фролова М.В. Возможности несократического диалога в обучении стереометрии / М.В. Фролова, Е.А. Бедненко, Е.В. Сухорукова, М.А. Шабашева // Физико-математическое и ИТ-образование в современном обществе : Материалы Всероссийской научно-методической конференции, 9–10 октября 2025 г. – Псков : Псковский государственный университет, 2025. – С. 103-110.

5. Фролова, М.В. Эвристические особенности несократического диалога и его использование в стереометрии / М.В. Фролова, Е.В. Сухорукова, Е.А. Бедненко, М.А. Шабашева // Эвристическое обучение математике: сборник трудов VIII Международной научно-методической конференции, Донецк, 18–20 декабря 2025 г. : в 2 ч. / под общ. ред. проф. С.В. Беспаловой, проф. А.А. Русакова, проф. Е.И. Скафы. – Донецк : Изд-во ДонГУ, 2025. – Ч. 1. – С. 351-357.

6. Фролова М.В. Особенности использования метода несократического диалога при обучении стереометрии / М.В. Фролова // Современные проблемы математики и математического образования : Международная научная конференция «78 Герценовские чтения», Санкт-Петербург, 15–17 апреля 2025 года. – Санкт-Петербург : Издательско-полиграфическая ассоциация высших учебных заведений, 2025. – С. 144-149.

7. Фролова М.В. Создание стереометрических опорных конструкций и методы их использования / М.В. Фролова, Е.С. Гузиёва, О.К. Жданова, О.Е. Малкина // Математика и математическое образование в современном обществе : материалы Всероссийской научно-практической конференции, 2 декабря 2024 г., Санкт-Петербург / под науч. ред. В.В. Орлова и М.Я. Якубсона. – Санкт-Петербург : Издательство РГПУ им. А. И. Герцена, 2025. – С. 134-139.

8. Фролова М.В. Система УМК А.Д. Александрова, А.Л. Вернера, В.И. Рыжика / М.В. Фролова, М.С. Новицкая, В.А. Маточинская // Математика и математическое образование в современном обществе : материалы Всероссийской научно-практической конференции, 2 декабря 2024 г., Санкт-Петербург / под науч. ред. В.В. Орлова и М.Я. Якубсона. – Санкт-Петербург : Издательство РГПУ им. А.И. Герцена, 2025. – С. 173-174.

9. Дзюба (Фролова) М.В. Метод неосократического диалога в классах с углубленным изучением математики при решении задач по теме «Угол между скрещивающимися прямыми» / М.В. Дзюба // Современные проблемы математики и математического образования : LXXVII Герценовские чтения: международная научная конференция: сборник научных трудов / под науч. ред. В.В. Орлова, М.Я. Якубсона, Санкт-Петербург, 16-18 апреля 2024 года. – Санкт-Петербург : Издательство РГПУ им. А.И. Герцена, 2024. – С. 118-123.

10. Дзюба (Фролова) М.В. Простота и красота школьного курса геометрии А.Д. Александрова / А.Л. Вернер, Н.Л. Стефанова, М.В. Дзюба // Методика преподавания в современной школе: актуальные проблемы и инновационные решения : Материалы Российско-узбекской научно-методической конференции, Ташкент, 10–11 ноября 2023 года. – Санкт-Петербург : Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, 2023. – С. 154-161.

11. Дзюба (Фролова) М.В. Исследовательские блуждания по стереометрической задаче / М.В. Дзюба, М.Р. Лапалайнен, С.А. Йазыджи // Физико-математическое образование в современном обществе : проблемы, пути решения, перспективы развития: Материалы Международной научно-практической конференции, 27–28 сентября 2023 г. – Псков : Псковский государственный университет, 2023. – С. 63-69.

12. Фролова М.В. Метод кругов Сократа на уроке стереометрии с учащимися классов с углубленным изучением математики / М.В. Фролова // Эвристика и дидактика математики : Материалы XII Международной научно-

методической дистанционной конференции-конкурса молодых ученых, аспирантов и студентов, Донецк, 30 марта 2023 года. – Донецк : Донецкий государственный университет, 2023. – С. 83-85.

13. Фролова М.В. Использование метода несократического диалога как способа формирования критического мышления при обучении стереометрии учащихся специализированных классов / М.В. Фролова // Современные проблемы математики и математического образования : Сборник научных статей Международной научной конференции: к 225-летию Герценовского университета, Санкт-Петербург, 04–06 июня 2022 года / под редакцией В.В. Орлова и М.Я. Якубсона. – Санкт-Петербург : Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, 2022. – С. 113-118.

14. Фролова М.В. Сократический диалог как способ формирования навыков рассуждения на уроках стереометрии в классах с углубленным изучением математики / М.В. Фролова // Классическая и современная геометрия : материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Л.С. Атанасяна, Москва, 01–04 ноября 2021 года / Московский педагогический государственный университет. – Москва : Московский педагогический государственный университет, 2021. – С. 149- 150.

Глава I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НЕОСОКРАТИЧЕСКОГО ДИАЛОГА ПРИ ОБУЧЕНИИ СТЕРЕОМЕТРИИ УЧАЩИХСЯ КЛАССОВ С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ МАТЕМАТИКИ

В данной главе мы сосредоточились на анализе современных исследований, посвящённых диалоговым методам обучения геометрии. Актуальность диалогового обучения для организации учебно-исследовательской деятельности учащихся классов с углублённым изучением математики обусловлена, с одной стороны, требованиями ФГОС СОО к развитию самостоятельности школьников, с другой – спецификой стереометрического материала, в котором наглядность и логика могут вступать в противоречие. Уточняется содержание понятия «неосократический диалог» на основе анализа философских первоисточников и общепедагогических исследований, определяется его место в системе видов диалогового взаимодействия и специфика при обучении стереометрии. Также мы выделяем учебно-исследовательские умения, развитие которых ФГОС СОО предписывает учащимся классов с углублённым изучением математики, и обосновываем возможность их развития с помощью использования неосократического диалога. Уточняется содержание понятия «частично открытая задача», выделяются типы. Обосновывается почему некоторые типы задач являются эффективным средством использования неосократического диалога.

§1. Содержание понятия «неосократический диалог» в обучении

Неосократический диалог опирается на один из древнейших видов диалогового взаимодействия – диалог Сократа. Сократ, объявив себя незнающим, начинал диалог с просьбы дать определение нравственного понятия (например, в «Меноне»: «Скажи ты сам, Менон, ради богов, что называешь добродетелью»), настаивая на поиске истины, то есть однозначного определения того или иного понятия, идя от частных случаев к более общим характеристикам. Также в «Теэтете» речь идёт об определении самого понятия «знание»: собеседники «хотели узнать, что такое само знание». Собеседник отвечал уверенно, но Сократ вопросами разбивал утверждение на части, выявляя противоречия (эленхос). В результате собеседник осознавал неполноту или ошибочность своих знаний (ирония), что очищало сознание от ложной уверенности. После осознания незнания следовали вопросы, стимулирующие «рождение» новых идей (майевтика). Сократ уподоблял себя повивальной бабке, помогающей собеседнику самостоятельно прийти к более точному пониманию. В «Теэтете» он поясняет, что его искусство «наблюдает над родами не телесными, а душевными». Если новая идея оказывалась несовершенной, цикл повторялся. Однако полный цикл у Сократа редко завершался окончательной формулировкой – чаще наступала апория: состояние, когда прежние убеждения разрушены, а новые ещё не сформированы. Сократ считал такой результат полезным, так как, на его взгляд, осознание ошибок избавляло от иллюзии знания и приближало человека к мудрости. Отсюда и основная цель сократовского диалога – просветительская. Она состоит в том, чтобы пробудить у собеседника внутреннюю потребность искать истину.

На основе этих принципов сложился особый вид диалогового взаимодействия, который называют сократическим диалогом. Как метод обучения философствованию его развил Л. Нельсон. В своем докладе «Сократический метод», прочитанном в 1922 году в Гёттингене [220], он объяснил основные положения своей теории. Для Л. Нельсона сократический

диалог был фундаментальным инструментом философского образования. Он противостоял такому преподаванию, при котором знания передаются в готовом виде и не подвергаются критическому осмыслению. Л. Нельсон видел в сократическом диалоге искусство воспитания философа. Этот диалог, по его убеждению, должен пробуждать самостоятельное мышление студента, развивать его умение философствовать. Так, традиционное взаимодействие учителя и ученика в форме вопросов и ответов Л. Нельсон заменяет коллективным обсуждением. Учитель у него выступает наставником (фасилитатором), иницилирующим и поддерживающим коммуникацию внутри ученического сообщества. Ключевой принцип диалога у Л. Нельсона состоит в том, что учитель отказывается от «обучающих суждений». Он не отвечает на философские вопросы учеников и не задаёт вопросов, которые можно истолковать как скрытую подсказку. Его задача состоит в побуждении самих учащихся формулировать вопросы, предлагать ответы, подвергать их критике и требовать обоснованности каждого суждения. В том же году Л. Нельсон основал Философско-политическую академию, где реализовал эти принципы. Заметим, что в условиях идеологического давления в Германии 1920-1930-х годов диалог служил также инструментом формирования критического мышления и интеллектуальной сопротивляемости учащихся. Отметим, что Л. Нельсон в своих трудах и в докладе 1922 года использовал понятия «сократический метод» и «сократический диалог», рассматривая себя как продолжателя сократовской традиции. Термин «неосократический» появился позднее, в работах его последователей. Он понадобился, чтобы отличить современную практику от античной и подчеркнуть нововведения.

Так, Г. Хекман (1898-1996) адаптировал метод Л. Нельсона для педагогической практики. Он сформулировал «шесть педагогических мер», то есть правил ведения диалога, ориентированных на взаимопонимание и достижение консенсуса в группе [212]. Первая мера касалась содержательной беспристрастности руководителя. Он не вмешивается в содержательную область обсуждения и следит за динамикой работы группы. Вторая мера

предполагала движение в исследовании понятия от конкретного к абстрактному, что соответствует методу регрессивного абстрагирования. Третья мера связана со стремлением к взаимопониманию. Она требует внимательного отношения к высказываниям собеседника и дисциплины в аргументации. Четвёртая мера предписывает фокусироваться на исходном вопросе и не отклоняться в смежные области. Пятая мера – стремление к консенсусу как одному из ключевых условий беседы. Отметим, что Г. Хекман настаивал именно на консенсусе, противопоставляя его компромиссу. Шестая мера касается невмешательства руководителя. Фасилитатор задаёт только вопросы, позволяющие организовать работу группы.

Именно в работах Г. Хекмана и его последователей начинает употребляться термин «неосократовский диалог» и «неосократический диалог» (что связано с особенностями перевода с английского и немецкого). Он разграничивает историческую сократовскую беседу, а также концепцию Л. Нельсона и её современные педагогические ответвления.

Заметим, что единой общепринятой формулировки неосократического диалога в трудах Г. Хекмана и его последователей нами не найдено. Авторы описывают его только через совокупность признаков: групповой полилог, регрессивная абстракция, консенсус, сдержанность фасилитатора.

При этом сами последователи этой традиции, включая Х. Гронке [210], Д. Крона [213], Г. Раупах-Штрей [224], в своих фундаментальных работах преимущественно используют понятие «сократический диалог», имея в виду именно ту его форму, которая восходит к Л. Нельсону и Г. Хекману. Поэтому и в данном исследовании при обращении к трудам разных авторов мы будем употреблять термин «сократический диалог» или «неосократический диалог», вслед за ними, но подразумевая всегда педагогическую традицию, которая была заложена Л. Нельсоном и развита Г. Хекманом.

В конце XX века М. Липман разработал программу «Философия для детей», где основой коммуникации также выступал полилог, а класс становился «сообществом исследователей». Смысл такого сообщества

раскрывает формулировка из программы: «Всякое исследование – самокритичная практика» [217]. Сохранив черты подхода Л. Нельсона, к которым относятся коллективность и майевтическая роль учителя, М. Липман внёс несколько дополнений. Он выделил измерения мышления: «критическое, творческое и заботливое» [217]. А также ввёл организационную форму круга, символически уравнивающую всех участников. Диалог у М. Липмана структурирован по шести этапам, от возникновения проблемы до рефлексии.

Отечественная психолого-педагогическая практика активно развивала идеи М. Липмана. Сократический диалог как средство, которое развивает самостоятельность мышления рассматривал А. А. Марголис. Ученик учится задавать вопросы и искать собственные ответы через равноправное диалогическое взаимодействие: «Организация учителем на уроке философии не разговора или бессвязной болтовни учащихся, а именно философского диалога (вернее, полилога) с формирующимся умением четко высказывать свои мысли, слушать других участников, приводить аргументы, взвешивать основательность доводов и т. д. позволяет реально, а не декларативно формировать у ребенка младшего школьного возраста способность рассуждать, относиться рефлексивно к своему способу размышления и корректировать его» [93]. Таким образом, идеи М. Липмана получили в отечественной психолого-педагогической практике своё развитие, где диалог рассматривается как инструмент становления рефлексивного мышления, способного к самокоррекции.

Также В. В. Рубцов рассматривал психологические модели учебного диалога и условия развития спонтанных понятий ребёнка: «В сократическом диалоге осуществляется: экстерииоризация спонтанных мировоззренческих представлений субъектов; обмен спонтанными мировоззренческими представлениями между участниками диалога...» [142]. В своей программе «Воспитательный диалог» М. В. Телегин представил диалогические практики, которые опираются на мировоззренческие диалоги, что позволяет учесть

психологические особенности детей и подчеркнуть целевую направленность сократической беседы: «Именно актуальный уровень развития детей, их собственное мнение по обсуждаемым вопросам – исходный пункт для организации воспитательных диалогов» [170].

Современный интерес к применению сократического диалога с детьми подтверждается многочисленными публикациями. Например, исследователи О. А. Погодина и О. Б. Васильева отмечают, что такой диалог вовлекает ребёнка в образовательное взаимодействие и развивает его речь и мышление: «В работе с детьми сократический диалог ориентирован на созидание и развитие осознанного мировоззрения ребенка, а также на обучение разумному самостоятельному мышлению» [131].

Сократический диалог активно применяется на уроках гуманитарного цикла. Например, исследователь Е. В. Гусева приводит пример как его использовать на уроках литературы во время изучения «Записок из мёртвого дома» Ф. М. Достоевского. Диалог помогает критически осмыслить материал, сформулировать собственные идеи и глубже понять художественное произведение: «В процессе совместной работы учащимися самостоятельно была выделена ключевая антитеза произведения: противопоставление свободы – несвободы. В ходе коллективного обсуждения... учащимися были найдены следующие возможные трактовки понятий "свобода" и "несвобода"...» [44].

Сократический диалог применяется и в вузовском обучении. Н. Г. Егошина, например, использует его на занятиях по английскому языку. Она показывает, что такой диалог развивает у студентов способность видеть альтернативные точки зрения, анализировать последствия и принимать решения: «Занятия с использованием технологии сократического диалога облегчают и углубляют понимание обучающимися ценностных идей. <...> Одним из достоинств такого занятия является обучение пониманию точек зрения других людей» [53]. Тем самым у студентов формируются

универсальные компетенции, значимые для будущей профессиональной деятельности.

Близкий по духу пример мы находим в работе Л. Д. Ерохиной, которая рассматривает сократический диалог как средство развития критического мышления студентов-юристов в курсе философии. Автор подчёркивает: «Сократовский метод эффективно использовать для демонстрации сложности, трудности и неопределённости проблемы... Кроме того, опыт работы в аудитории показывает, что студенты лучше помнят как ответ, так и логические рассуждения, если они приходят к результатам самостоятельно». Хотя в статье описывается опыт преподавания гуманитарной дисциплины, однако сам механизм представляется нам принципиально важным: диалог задаёт особый режим мышления, при котором студент не получает готовое знание, а приходит к нему через собственное рассуждение.

Зарубежные исследователи также изучают применение сократического диалога в гуманитарных областях. Ф. Бросоу, например, отмечает его эффективность для запуска глубокой и содержательной дискуссии, однако самым важным, но при этом непроработанным его звеном является, по мнению автора, техника проверки аргументов [207]. Предлагаемый им подход строится по двум осям: три области (понимание, оценивание, действие) и четыре уровня глубины проработки вопроса. На низшем уровне («мышление») студент высказывает интуитивную ассоциацию без каких-либо обоснований. Переход на следующий уровень («рефлексия») происходит за счёт добавления «причин для себя» студент начинает объяснять, почему он так думает. На уровне «аргументации» добавляются «причины для других», что позволяет убедить собеседника. Высший уровень («философствование») требует поиска «причин для всех людей» - универсальных оснований, которые могли бы быть приняты любым разумным существом. Ф. Бросоу также предлагает оценивать качество аргументов, приведённых на каждом уровне, с помощью пяти критериев: ясность, связь, непротиворечивость, полнота и сравнение. Такая техника

оценивания причин даёт учителю чёткий инструментарий для управления дискуссией и оценки глубины аргументации студентов.

Итак, перечислим черты несократического диалога, которые проявляются в обучении. Первая связана с развитием мышления, так как знания не передаются в готовом виде. Вторая черта касается исходного вопроса, который должен быть неоднозначным, допускать разные интерпретации ситуации. Также опровергающий характер диалога сменяется на поддерживающий, равный. Позиция учителя – фасилитатор и равноправным участником обсуждения. И наконец, пятая черта касается результатов. В ходе диалога у учащихся развиваются критическое мышление, коммуникативные умения и навыки рефлексии. Результаты проведённого анализа отражены в таблице 1.

*Таблица 1 – Сравнительная характеристика понятий
«Сократовский диалог» и «Несократический диалог»*

Критерий сравнения	Сократовский диалог	Несократический диалог
Цель	Просветительская (побуждение к сомнению)	Образовательная (развитие мышления)
Исходный вопрос	Неоднозначный вопрос о сущности нравственного понятия, требующий универсальной формулировки (например, в произведении Платона «Государство»: «что такое справедливость?»)	Неоднозначный вопрос об интерпретации ситуации (например, на уроке литературы: «Как вы считаете, какое значение имеет анализ образов героев для понимания темы исследования?»)
Характер дальнейших вопросов	Вопросы, ведущие к логическому противоречию	Вопросы, стимулирующие разные точки зрения, расширяющие поле поиска
Как организована майевтика («рождение»)	Центральный механизм, заключающийся в последовательном опровержении исходных представлений собеседника	Частично сохраняется, но смягчена, так как делается акцент на помощи, а не на опровержении
Роль ведущего диалог	«Повитуха» – помощник в рождении новой формулировки	Фасилитатор – организатор обсуждения, равноправный участник диалога
Ожидаемый результат	Осознание собеседником противоречий в собственных представлениях (апория), «рождение» более точной формулировки.	Развитие критического мышления, коммуникативных умений, толерантности к иным точкам зрения

Перейдём к этапам построения неосократического диалога в обучении. Отметим сразу, что разные варианты структурирования сократического (неосократического) диалога уже описаны в научно-педагогической литературе. Одни авторы предлагают более дробные схемы, другие – укрупнённые. Предлагаемая нами последовательность этапов представляет собой обобщение и адаптацию существующих подходов к организации неосократического диалога в образовательном процессе:

1. Формулировка исходной проблемы в виде общего неоднозначного вопроса;
2. Выдвижение гипотез учащихся;
3. Выявление противоречий в гипотезах учащихся с помощью вопросов учителя;
4. Постановка новых вопросов для углубления понимания;
5. Обобщение и формулирование вывода;

Приведенные этапы являются общими для различных предметных областей.

Итогом анализа научно-методической и педагогической литературы стало уточнение содержания понятия «неосократический диалог».

Итак, неосократический диалог рассматривается нами как вид учебного диалога, в которой учитель выполняет роль координатора мыслительной деятельности школьников, используя в качестве единственного средства управления – вопросы. Диалог начинается с вопроса, не имеющего однозначного ответа, что побуждает учащихся выдвигать различные гипотезы. Последующие вопросы педагога выстраиваются таким образом, чтобы привести школьников к осознанию противоречий в некоторых из высказанных предположений.

Современное информационное общество характеризуется не только возрастанием объёма знаний, но и усложнением связей между ними. Следовательно, возникает потребность в умении ориентироваться в

существующих знаниях, углублять их, расширять и устанавливать между ними связи. Данное умение необходимо начинать формировать еще в школе.

В то же время реальная жизнь, как правило, не предлагает человеку однозначных ситуаций и готовых алгоритмов их разрешения. Поэтому обучение должно строиться на особом типе задач, в которых уже заложены эти неоднозначные ситуации. В дидактике такие задачи называются частично открытыми. Они предполагают неоднозначность условия, множественность способов решения, отсутствие единственно верного ответа.

Значит, необходим такой способ организации обучения, в рамках которого естественным образом была бы организована работа с частично открытыми задачами, а также устанавливались связи между усвоенными элементами знания.

Важно подчеркнуть, что эффективность такого обучения во многом зависит от сформированности у учащихся умения задавать содержательные вопросы. В педагогической литературе эта проблема имеет глубокие корни. Так, К. Д. Ушинский в труде «Человек как предмет воспитания» рассматривал умение ставить вопросы как важнейший компонент развития познавательной самостоятельности, утверждая, что самостоятельно сформулированный вопрос свидетельствует о начале мыслительной деятельности [182].

В современной ТРИЗ-педагогике Г. С. Альтшуллер разработал алгоритмы постановки «сильных вопросов». Эти алгоритмы помогают решать изобретательские задачи: «АРИЗ – алгоритм решения изобретательских задач – комплексная программа алгоритмического типа, основанная на законах развития технических систем и предназначенная для анализа и решения изобретательских задач» [11]. А. А. Гин в пособии «Приёмы педагогической техники» предлагает конкретные приёмы, например «Подбери вопросительное слово» и «Дострой вопрос» [36]. Он учит школьников формулировать вопросы целенаправленно. А. Б. Селюцкий в работе «Вдохновение по заказу: уроки изобретательства» рассматривает постановку вопросов как важнейший этап творческого поиска [152]. Он подчёркивает, что

правильно сформулированный вопрос уже содержит половину решения проблемы: «Правильно заданный вопрос, правильно поставленная задача – это наполовину, а иногда и больше готовое ее решение» [152]. В технологии развития критического мышления умение задавать вопросы к тексту считается базовым умением работы с информацией. Это подтверждает метапредметную значимость такого умения.

Однако ситуация меняется, когда речь идёт об обобщении знаний. На этом этапе обучения необходимо задавать вопросы таким образом, чтобы ответы на них обнаруживали связи между геометрическими фигурами. Но вопросу использования диалогической методики, направленной на эту цель, пока уделено недостаточно внимания. В связи с этим особую значимость приобретает разработка такого вида диалога, который, в частности, целенаправленно формировал бы у учащихся умение задавать содержательные вопросы, которые и станут инструментом учебного исследования.

Неосократический диалог в его современном педагогическом понимании строится на вопросах, которые предполагают сопоставление разных позиций. Тем самым происходит побуждение учащихся к выдвижению гипотез и далее к обнаружению противоречий в них.

Открытым остаётся вопрос о том, как данный приём может быть реализован на математическом содержании и какие специфические черты он приобретёт в этом предметном поле. Указанный вопрос и составляет цель настоящего исследования.

Отметим ещё раз, что в нашей работе использование неосократического диалога нацелено на организацию учебного исследования, которое ориентировано на получение субъективно нового для учащегося знания и на развитие его учебно-исследовательских умений. В свое время как классическое научное исследование нацелено на объективно новый результат.

Таким образом, нами уточнено понятие «неосократический диалог» в обучении. **Неосократический диалог** представляет собой групповое обсуждение, в котором учитель, занимая позицию сдержанного фасилитатора,

организует сопоставление суждений, выдвигаемых самими учащимися. С помощью вопросов он фиксирует противоречия между этими суждениями, возвращает участникам их собственные формулировки и побуждает к проверке гипотез. Результатом такого обсуждения становится система обобщённого знания, выстроенная и зафиксированная учащимися на основе сопоставления собственных позиций.

Эффективность использования диалогового взаимодействия в обучении обоснована ещё в работах классиков дидактики и психологии. Л. С. Выготский подчёркивал, что мышление формируется через диалог [34]. Ж. Пиаже показал, что умственное развитие ребёнка происходит в процессе преодоления сосредоточенности на собственной точке зрения через столкновение с иными позициями в ходе общения [129]. Дж. Дьюи утверждал, что подлинное обучение – это исследование, которое невозможно без обсуждения [52].

В современной дидактике существует множество видов учебного диалога: проблемный, эвристический, несократический и др. Они различаются по характеру вопросов, роли учителя и способу организации познавательной деятельности учащихся. Для их систематизации и выявления принципиальных различий несократического диалога от других, целесообразно обратиться к классификации методов обучения по характеру познавательной деятельности учащихся, предложенной И. Я. Лернером [88]. Указанная классификация включает информационно-рецептивный метод, репродуктивный, метод проблемного изложения, частично-поисковый, исследовательский. Информационно-рецептивный метод направлен на передачу готовых знаний, репродуктивный на формирование умений действовать по образцу. Метод проблемного изложения демонстрирует образец научного мышления. Частично-поисковый метод организует поиск решений под руководством учителя. Исследовательский метод предполагает самостоятельную творческую деятельность учащихся.

Исходя из данной классификации, каждый вид учебного диалога может быть реализован в рамках соответствующего метода обучения. Для нашего

исследования особый интерес представляют метод проблемного изложения, частично-поисковый и исследовательский, так как именно в них диалоговое взаимодействие является необходимым условием организации познавательной деятельности учащихся, а не вспомогательным приёмом. Заметим, что в информационно-рецептивном и репродуктивном методах диалог при обучении тоже уместен. Но там он необходим для контроля и уточнения, что не задает характер учебной работы. А в названных трёх методах диалог нужен для того, чтобы через него разворачивался поиск, фиксировались противоречия и оформлялись выводы.

Например, цель метода проблемного изложения состоит в том, чтобы раскрыть перед учащимися логику научного поиска. И. Я. Лернер пишет: «...в ходе проблемного изложения ставятся проблемы, разъясняются гипотезы, строится мысленный эксперимент, делаются выводы из различных его вариантов, показывается необходимость их проверки реальным экспериментом, обнажаются шаг за шагом пути и логика движения к возможному решению проблемы. Во всех случаях перед учащимися раскрываются не только конечные результаты исследований, не только этапы развертывания последних, но и связи между этапами, пути движения от одного этапа к другому, характерные отклонения, возникшие препятствия в виде новых проблем» [88]. Поэтому ведущий вид взаимодействия здесь проблемный диалог. Его специфика заключается в том, что учитель создаёт проблемную ситуацию, которая выводит учащихся на переживание противоречия между имеющимся знанием и обнаруживаемым незнанием. Таким образом учитель, согласно И. Я. Лернеру, «знакомит учащихся не только с найденными решениями тех или иных научно-познавательных или практических проблем, областью и способами их применения, но и с логикой, подчас противоречивой, поиска этих решений» [88].

Со временем метод проблемного изложения вырос в целую модель проблемного обучения. В её рамках проблемная ситуация, поиск способов её разрешения и формулирование выводов рассматриваются как

взаимосвязанные компоненты учебного процесса. В современной практике проблемного обучения доля самостоятельности учащихся растёт. Учитель постепенно передаёт им часть поисковых действий. Он предлагает высказывать предположения, оценивать предлагаемые шаги и участвовать в проверке выводов. Общая логика движения при этом остаётся заданной извне.

Идея строить обучение через решение проблем, приближённых к жизненным, восходит к Дж. Дьюи: он настаивал, что знание усваивается не через сообщение, а через действие, и это положение до сих пор остаётся отправной точкой для большинства концепций проблемного обучения. В отечественной педагогике этот подход получил самостоятельное развитие в работах М. И. Махмутова, А. М. Матюшкина и И. Я. Лернера. Так, М. И. Махмутов построил целостную дидактическую систему проблемного обучения и определил: «Проблемное обучение – это тип развивающего обучения, в котором сочетаются систематическая самостоятельная поисковая деятельность учащихся с усвоением ими готовых выводов науки, а система методов построена с учетом целеполагания и принципа проблемности; процесс взаимодействия преподавания и учения ориентирован на формирование научного мировоззрения учащихся, их познавательной самостоятельности, устойчивых мотивов учения и мыслительных (включая и творческие) способностей в ходе усвоения ими научных понятий и способов деятельности, детерминированного системой проблемных ситуаций» [96]. А. М. Матюшкин же шёл от психологии: опираясь на восходящее к С. Л. Рубинштейну понимание мышления как анализа и синтеза [141], он разработал теорию проблемных ситуаций [95], в которой описал их структуру, типы и роль в активизации мыслительной деятельности школьника. И. Я. Лернер, в отличие от двух предыдущих авторов, сместил акцент на содержание образования: он показал, что опыт творческой деятельности не может быть передан через простое усвоение готового знания и должен быть включён в учебный процесс как особая составляющая: «Рассмотренные методы, обеспечивая подготовку молодого поколения к воспроизведению и тем самым

сохранению накопленной культуры, не могут, однако, обучить творческой деятельности. <...> Без создания с помощью этих методов фонда знаний, навыков и умений личности нельзя усвоить и опыт творческой деятельности, поскольку “пустая голова” не творит. Но они являются только предпосылкой, условием успешного обучения творческой деятельности. Сами они ей не учат» [88]. Для настоящей работы существенно, что все три концепции, при различии точек рассмотрения, сходятся в одном: источник учебной активности лежит в проблемной ситуации, а не в изложении материала.

Идеи этих учёных стали теоретической основой для последующего развития проблемно-диалогического обучения. Е. Л. Мельникова, последовательница идей А. М. Матюшкина, выделила несколько видов проблемного диалога [99]. Это побуждающий от проблемной ситуации, подводящий к теме, побуждающий к гипотезам и подводящий к знанию. Первые два вида решают задачи постановки исходной проблемы. Они формируют проблемную ситуацию и помогают её осмыслить. Два последних вида помогают в процессе поиска решений и критического анализа проблемной ситуации. Пособие Е. Л. Мельниковой «Проблемный урок, или Как открывать знания с учениками» содержит обширный иллюстративный материал [100]. В нём показано, как применять указанные диалоги: «Побуждающий диалог – отдельные реплики (бег зайца по полям). Подводящий диалог – система посильных вопросов (“бычок на веревочке”). У диалогов противоположный развивающий эффект. Побуждающий диалог развивает творческие способности детей. Подводящий – логическое мышление» [100]. Наибольшее число примеров связано с преподаванием русского языка и литературы, однако разработки по математике также представлены. Такой подход демонстрирует, как различные виды проблемных диалогов могут быть интегрированы в учебный процесс для активизации мышления учащихся в рамках проблемного обучения.

В свою очередь, целью частично-поискового (эвристического) метода обучения является постепенное приближение учащихся к самостоятельному

решению проблем путём организации активного поиска решения познавательных задач под руководством учителя, в ходе которого учащиеся обучаются выполнению отдельных этапов исследования. В рамках данного метода учитель организует поиск решения проблемной задачи посредством разбиения задачи на подзадачи и построения системы логически взаимосвязанных вопросов.

Естественным и ключевым видом взаимодействия в рамках данного метода должен выступать такой диалог, который обладает следующими характеристиками: последовательностью логически взаимосвязанных вопросов, каждый из которых представляет собой шаг поиска, ориентированием на развитие у учащихся навыков самостоятельного исследования, охватывая ключевые его этапы, направляющей ролью учителя. Без использования такого вида диалога метод утрачивает свою специфику и сводится к другим методам обучения, при которых учащиеся не приобретают собственного опыта учебно-исследовательской деятельности, а лишь воспринимают и воспроизводят готовые знания, смотрят как выполняет этапы учебно-исследовательской деятельности учитель в качестве демонстрации.

Развёрнутое обоснование эвристического диалога дал А. В. Хуторской. В его концепции ученик создаёт собственный образовательный продукт, который затем сопоставляется с культурно-историческим аналогом: «Эвристическое обучение ставит целью конструирование учеником собственного смысла, целей и содержания образования, а также процесса его организации, диагностики и осознания. <...> Первичным в учебном процессе выступает познание учеником реальной действительности; после получения соответствующих знаний и опыта происходит изучение достижений человечества в этой действительности» [193]. Тем самым эвристический диалог предстаёт не как приём передачи знаний, а как механизм порождения учеником собственного содержания образования, которое лишь затем соотносится с культурно-историческими образцами.

Отдельно следует рассмотреть подход А. Д. Короля, в котором диалоговая составляющая эвристического обучения получает дальнейшее развитие, а право задавать вопросы передаётся ученику. Модель диалога включает три типа вопросов: «Что?», «Как?», «Почему?». Согласно А. Д. Королю: «в методе эвристического диалога вопрошающая деятельность ученика, направленная на познание объекта, условно обозначена модельными вопросами: “Что?” (что мы изучаем?), “Как?” (как этот объект описан в культуре?), “Почему?” (почему мое представление не во всем совпало с культурно-историческим аналогом?)» [81]. Вопросы первого типа направлены на выделение объекта изучения, второго на описание его свойств и сопоставление с культурным аналогом, третьего на объяснение закономерностей и установление связей. Позиция учителя в таком диалоге состоит в сопровождении самостоятельного поиска ученика. Существенно, что в отличие от эвристической беседы в трактовке И. Я. Лернера, где вопросы задаёт преимущественно учитель, концепция А. Д. Короля переносит акцент на вопрос самого ученика. Именно это делает эвристический диалог потенциально возможным для развития учебно-исследовательских умений на стереометрическом материале.

Заметим, что в такой трактовке несократический диалог целесообразно рассматривать как частный случай эвристического диалога. Его специфика состоит в том, что обсуждение строится на сопоставлении уже высказанных суждений и работе с возникающими между ними противоречиями. Учитель фиксирует несовпадение позиций и возвращает их участникам до тех пор, пока учащиеся сами не обнаружат источник расхождения. Противоречие выполняет роль механизма, вокруг которого разворачивается обсуждение.

В свою очередь, целью исследовательского метода обучения является формирование у учащихся опыта самостоятельного осуществления процесса познания, обеспечение творческого применения знаний и овладение методами научного познания в процессе деятельности по поиску этих методов. При реализации данного метода учитель формулирует проблему учебного исследования, иногда совместно с учащимися, но за процессом поиска

решения лишь наблюдает, фиксируя успехи и затруднения. Учащиеся самостоятельно решают проблему, изучают литературу по теме, разрабатывают план учебного исследования, проверяют гипотезы и оценивают полученные результаты. Ведущим видом взаимодействия здесь выступает диалог, который характеризуется инициативой в постановке вопросов, принадлежащей самим учащимся, направленностью на проверку выдвинутых гипотез и аргументацию выводов, субъект-субъектным характером взаимодействия. Учитель при этом выполняет роль консультанта, а не носителя готовых ответов. Специфика такого диалога состоит в том, что он разворачивается вокруг самостоятельно выдвинутых учащимися предположений. Участники диалога сопоставляют разные способы решения, удерживают несколько возможных направлений поиска и возвращаются к ранее высказанным суждениям, если те требуют уточнения. Вопросы здесь рождаются из самой исследовательской работы, а не задаются учителем в качестве направляющих шагов. Это позволяет учащимся осваивать способы научного познания в их реальном применении.

В современной зарубежной дидактике известна четырёхуровневая модель исследовательского обучения, предложенная Х. Банчем и Б. Беллом [204]. В настоящее время она широко используется при проектировании учебного исследования, поскольку позволяет различать степень самостоятельности учащихся и выстраивать постепенный переход от управляемого обучения к самостоятельному исследованию. Б. Белл выделил четыре уровня: подтверждающее исследование, структурированное исследование, направляемое исследование и открытое исследование. Они различаются по тому, кто формулирует проблему, планирует ход исследования и определяет способ оформления результата.

На уровне подтверждающего исследования проблема, план и способ решения задаются учителем, учащиеся выполняют предложенные шаги и убеждаются в правильности известного вывода. На уровне структурированного исследования учитель формулирует проблему и

предлагает последовательность работы, а учащиеся самостоятельно проводят исследование и формулируют вывод. На уровне направляемого исследования учитель определяет общее направление, а учащиеся сами выделяют проблему, разрабатывают план и осуществляют поиск решения. Уровень открытого исследования предполагает полностью самостоятельное исследование, включая постановку проблемы, выбор методов и оценку полученных результатов.

Приведённая классификация используется нами для уточнения места применения несократического диалога в учебном процессе.

Таким образом, в данном параграфе на основе анализа философской, психолого-педагогической и научно-методической литературы решены следующие задачи:

1. Прослежена эволюция несократического диалога от античного образца (сократовский диалог) до педагогических интерпретаций Л. Нельсона, Г Хекмана и др. Выявлены его характерные черты в педагогическом контексте: исходный неоднозначный вопрос, смягчение опровергающего характера, роль учителя как фасилитатора, развитие критического мышления и рефлексии.

2. Уточнено понятие несократического диалога как разновидности учебного диалога, в котором учитель через систему вопросов организует сопоставление суждений учащихся, фиксирует противоречия между ними и побуждает к проверке гипотез. Результатом такого обсуждения становится система обобщённого знания, выстроенная самими учащимися.

3. На основе классификации методов обучения И. Я. Лернера установлено соответствие видов учебного диалога с методами обучения. Проблемный диалог соответствует методу проблемного изложения. Эвристический диалог выступает ведущим видом взаимодействия в рамках частично-поискового метода. Несократический диалог рассматривается как частный случай эвристического диалога и также относится к частично-

поисковому методу. Его специфика состоит в том, что движение мысли организуется через обнаружение и удержание противоречий в суждениях самих учащихся, а также через рождение обобщённого знания и выстраивание системы изученного содержания.

4. С опорой на четырёхуровневую модель исследовательского обучения Х. Банча и Б. Белла определено возможное место неосократического диалога и в учебном исследовании. Установлено, что он может применяться на уровнях структурированного и направляемого исследования. В рамках настоящей работы неосократический диалог проектируется на уровне направляемого исследования, поскольку это в наибольшей степени отвечает задачам развития учебно-исследовательских умений и формирования субъектной позиции учащихся.

5. Полученные результаты создают теоретическую основу для разработки методики использования неосократического диалога в процессе обучения геометрии, что определяет направление дальнейшего исследования.

§2. Особенности использования несократического диалога при обучении стереометрии учащихся классов с углубленным изучением математики

В обучении математике активно используются различные виды диалогового взаимодействия, присущие методам проблемного изложения, частично-поисковому (эвристическому) и исследовательскому. Специфика математического содержания, предполагающая работу с абстрактными понятиями, строгими доказательствами и многовариантными способами решения, делает диалог необходимой формой взаимодействия с учащимися.

Анализ научно-методической литературы позволяет утверждать, что из всех видов учебных диалогов, применяемых в обучении математике, наиболее распространённым на сегодняшний день является проблемный диалог.

Так, Е. Л. Мельникова приводит конспекты различных этапов урока математики и соответствующие примеры диалогов [100]. Иллюстрируя «побуждающий от проблемной ситуации» диалог, автор предлагает проблемную ситуацию: «даны равенства $2+5\cdot3=17$ и $2+5\cdot3=21$ » [100]. Вопросы учителя направлены на то, чтобы учащиеся самостоятельно установили причину расхождения ответов, то есть нарушение порядка действий во втором примере при отсутствии скобок.

Проблемный диалог используют при введении нового материала. А. В. Оглуздина, например, приводит урок математики в 6-м классе по теме «Задачи на проценты» [114]. Она использует побуждающий диалог в сочетании с подводящим: «Побуждающий диалог состоит из отдельных стимулирующих реплик. На этапе постановки проблемы этот диалог применяется для того, чтобы ученики осознали противоречие, заложенное в проблемной ситуации, и сформулировали проблему» [114]. В свою очередь, подводящий диалог строится на заданиях, сложность которых постепенно растёт: «Подводящий диалог представляет собой систему вопросов и заданий. На этапе постановки проблемы учитель пошагово подводит учеников к формулированию темы» [114].

Обобщим результаты анализа научных источников. Специфика проблемного диалога в математике определяется несколькими факторами. Первый фактор связан с абстрактностью изучаемых понятий, так как учителю приходится переводить проблемную ситуацию на язык примеров или моделей. Второй фактор касается строгости доказательств, что побуждает включать в диалог вопросы о контрпримерах. Например: «Для всех ли чисел?», «А если ноль?». А также вопросы о логической полноте вывода. Третий фактор связан с многовариантностью решений. Четвёртый – касается граничных и вырожденных случаев, так как они часто служат источником проблемной ситуации и уточняют формулировку нового знания. Наконец, пятый фактор связан с завершением диалога через фиксацию результата. Ученики переходят от словесной формулировки к математической записи. Это может быть формула, алгоритм или краткое доказательство.

Значительное внимание в методической литературе уделяют и эвристическому диалогу при обучении математике.

В зарубежной методике обучения математике фундаментальные исследования в области эвристического обучения принадлежат Д. Пои [134]. Его работа направлена на поиск решения математической задачи. Д. Пои показал, что решение сосредоточено вокруг момента озарения, и выделил эвристические приёмы, повышающие вероятность его наступления. К ним относятся обращение к родственной задаче, разбиение задачи на подзадачи, введение вспомогательных элементов, рассмотрение частных случаев, специализация, обобщение, анализ размерности, метод движения от конца к началу, сведение к известному, использование аналогии. Д. Пои прямо опирался на сократический метод, выстраивая взаимодействие учителя и ученика через систему наводящих вопросов. Учитель в его подходе не сообщает готовое решение, а помогает ученику самостоятельно прийти к нему.

Для настоящего исследования работа Д. Пои важна прежде всего тем, что она подтверждает применимость сократического диалога к математическому

содержанию. Вместе с тем задачи нашей работы иные. Нас интересует обучение обобщению и систематизации знаний, установлению связей между элементами изученного содержания, в центре внимания находится развитие учебно-исследовательских умений. Поэтому идеи Д. Пойа рассматриваются нами как подтверждение возможности использования несократического диалога в области организации учебного исследования на математическом материале.

В отечественной методике обучения математике эвристическое обучение разрабатывалось в нескольких направлениях. Л. М. Фридман разработал систему эвристических методов решения задач и рассматривал эвристики как приёмы, направляющие поиск решения [189]. В его подходе основное внимание уделяется технике поиска, а именно разбиению задачи на подзадачи, преобразованию условия, введению вспомогательных элементов. Г. И. Саранцев изучал эвристические приёмы в обучении геометрии, связывая их с формированием умений доказывать и решать задачи [150]. Он предложил конкретные действия, направляющие мысль ученика, однако его работы также сосредоточены на организации индивидуального поиска решения. Е. Е. Семенов разрабатывал теорию и методику эвристического обучения математике, понимая эвристику широко, как пространство, в котором ученик находит путь к решению [155].

Активный исследователь в области эвристического обучения математике – Е. И. Скафа заложила теоретико-методические основы в этой области. Она выделила эвристические ситуации и конструкции, однако диалог в её работах не стал центральным механизмом – он выполняет роль одного из технологических элементов. Е. И. Скафа пишет: «Эвристическое обучение – это обучение, ставящее целью конструирование учеником собственного смысла, целей и содержания образования, а также процесса его организации, диагностики и осознания... Эвристическое обучение позволяет изменить подобную ситуацию – сделать первичными те цели и задачи, которые поставит ученик для себя. Роль учителя сводится к помощи ученикам в

формировании своих целей и последующем сопровождении его деятельности по их достижению» [161]. Она же подчёркивает: «Эвристическая деятельность школьников не предполагает от них предварительных умений действия по образцу. Наоборот, репродуктивная деятельность детей, если она предварительно осваивается и закрепляется, отрицательно влияет на возможность последующего творчества, создавая у детей шаблонные представления о требуемом образовательном продукте» [161]. Деятельность Е. И. Скафы важна для нас в двух отношениях. Во-первых, она показывает, что эвристический подход в обучении математике действительно работает и что для творческой деятельности учащихся нужны особые дидактические условия. Во-вторых, у Е. И. Скафы диалог не выступает самостоятельным предметом исследования: он включён в более широкую систему эвристического обучения наряду с эвристическими ситуациями, задачами и конструкциями. Это помогает нам яснее обозначить, что именно мы исследуем. В отличие от подхода Е. И. Скафы, в нашей работе неосократический диалог рассматривается не как вспомогательное средство, а как центральный механизм организации учебно-исследовательской деятельности при обучении стереометрии.

Отметим, что во всех названных исследованиях эвристическое обучение рассматривается преимущественно применительно к процессу поиска решения конкретной задачи. Основной акцент делается на том, как помочь учащемуся найти способ решения, выдвинуть подходящую идею, преодолеть затруднение в задачной ситуации. Коммуникативная сторона обучения, при которой учитель через диалог организует сопоставление суждений и работу с противоречиями, в этих работах специально не разрабатывалась. Задача систематизации и обобщения знаний, установления связей между элементами изученного содержания в них также не ставилась как самостоятельная. Неосократический диалог как средство организации учебного исследования на этапе обобщения математического материала в этих исследованиях не рассматривался.

В современных частных исследованиях, например у Л. С. Капкаевой и К. М. Спиридоновой, рассматриваются частные эвристические приёмы (выделение на чертеже перпендикуляра, наклонной и её проекции; распознавание прямого угла между перпендикуляром и проекцией; нахождение прямой, перпендикулярной к наклонной или её проекции; использование свойства медиан; метод разбиения на подзадачи) при обучении стереометрии для задач, выходящих за рамки программы (например, построение сечений многогранника) [69]. Авторы отмечают, что именно в геометрии существует большая возможность использования эвристических приёмов благодаря соединению строгой логики с наглядными представлениями. Наглядность (чертёж, пространственное воображение) позволяет выдвинуть гипотезу о расположении фигур или способе построения сечения, а логика – проверить эту гипотезу и обосновать её. Эвристический приём выступает как связующее звено между этими двумя компонентами мышления, направляя поиск решения и повышая его эффективность.

В работах К. Д. Носовой рассматривается использование эвристического диалога как эффективного средства формирования математической грамотности у обучающихся в условиях общего среднего образования [110, 111]. В статьях подчеркивается роль эвристического диалога что способствует повышению их аналитического мышления и познавательной активности. Также акцентируется внимание на приемах применения эвристического диалога (упрощение, конкретизация, разбиение на подзадачи) в образовательном процессе, что позволяет, по мнению автора, более эффективно формировать у школьников умение решать задачи и развивать функциональную грамотность в области математики.

Также Е. А. Козловская отмечает важность эвристического диалога в процессе формирования математической грамотности [76]. В статье описано как в ходе эвристического диалога учащиеся самостоятельно приходят к формулировке признаков и свойств геометрических объектов, анализируя и синтезируя полученный опыт: «Деятельность учителя заключается в

постановке взаимосвязанных вопросов, ответы на которые приводят к самостоятельной формулировке определения, теоремы и т.д.» [76]. Такой подход, по мнению автора, предотвращает формализм, что позволяет исключить заучивания без осмысления: «Такой подход приводит к формализму: учащиеся без понимания заучивают определения, теоремы и не могут применять их при решении задач в несильно и сильно измененных условиях» [76]. Учащиеся приобретают умение самостоятельно применять знания в разных условиях. Сложность таких уроков автор видит в умении учителя правильно ставить взаимосвязанные вопросы, так как именно они ведут учащихся к самостоятельным открытиям: «При использовании эвристического диалога, можно и отметить некоторые трудности: необходимо тщательно его готовить, ориентироваться на правильную формулировку и четкую постановку вопросов» [76]. Это требует определённой подготовки и мобильности.

Проведённый обзор научно-методической литературы показал следующее. Эвристический диалог в обучении математике разрабатывался преимущественно как средство организации поиска решения задачи. Он помогает учащемуся выдвигать предположения, проверять их и находить способ преодоления затруднения. Внимание исследователей при этом сосредоточено на отдельной задаче или конкретном геометрическом объекте. Задачу установления связей между элементами изученного содержания, а также построения целостной обобщённой конструкции в этих работах специально не ставили. Коммуникативная сторона обучения, при которой учитель через диалог организует сопоставление суждений и работу с противоречиями, также не рассматривалась как самостоятельный предмет исследования. Изучались отдельные методы и приёмы, но не сама диалогическая функция, которая обеспечивает движение ученика от частного факта к обобщению. Между тем именно этой функции в обучении стереометрии мы придаём первостепенное значение: нас интересует не поиск решения отдельной задачи, а организация учебного исследования,

направленного на обобщение знаний. Таким средством, на наш взгляд, и может выступать неосократический диалог.

К сократическому диалогу в обучении математике обращаются редко. Одна из немногих работ на эту тему статья М. А. Павловой и М. В. Шабановой «Сократовский диалог как метод исследовательского обучения экспериментальной математике на занятиях кружка» [127]. Авторы рассматривают сократический диалог как способ организации исследовательской деятельности школьников на внеклассных занятиях по экспериментальной математике. По их мнению, ведущая роль учителя, задающего вопросы, позволяет удерживать направление поиска и уточнять формулировки: «Сократовский метод беседы применим лишь в тех случаях, когда нужно помочь учащимся преодолеть ограниченность знаний и стереотипов мышления. Именно это позволяет говорить о том, что сократовский метод является разновидностью эвристической беседы, но не тождественен ей» [127]. Однако такой диалог в большей степени поддерживает поиск, чем порождает обобщение. В настоящем исследовании рассматривается иная организация диалога, при которой ученик самостоятельно формулирует содержательный вопрос и через него выходит на связи между элементами изученного материала.

Так и Л. В. Епишина в статье об организации диалога Л. Н. Толстого с детьми в Яснополянской школе отмечает схожесть принципов обучения в ней с принципами диалога Сократа: диалогичность обучения, активность учащегося наравне с учителем, обращение к жизненному опыту учащегося [55]. Сам Л. Н. Толстой в своих сочинениях пишет, что «математика имеет задачей не обучение счислению, но обучение приёмам человеческой мысли при исчислении» [175], что подчеркивает оценку возможности использования такого вида диалога при обучении математике.

Таким образом, анализ существующих источников позволяет сделать вывод, что сократический диалог в обучении математике изучен недостаточно. Авторы не рассматривают сократический диалог как средство для

возможности обобщения на уроке, а частично открытые задачи не используют как средство запуска диалога. Между тем именно обобщение знаний и запуск мыслительной деятельности для нас принципиальны, поскольку несократический диалог отличают неоднозначность вопроса, обсуждение разных точек зрения, аргументация и стимулирование самостоятельной постановки вопросов самими учащимися. В классах с углублённым изучением математики необходимость развития этих умений приобретает особое значение, и как раз они и не становились предметом специального изучения применительно к стереометрии.

При этом нельзя сказать, что вопрос о целенаправленном формировании умения задавать вопросы в методике обучения математике вообще не ставился. Он разрабатывался – однако в ином контексте. Например, в исследовании М. С. Рябовой разработана система вопросно-ответных процедур, предполагающая обучение учащихся двум последовательным шагам «постановка вопроса» и «формулирование ответа», что позволяет сместить акцент с контролирующей функции вопросов на развивающую [144]. Автор обосновывает необходимость специального обучения этим процедурам: «...организовать специальное обучение поэтапному выполнению двух элементарных процедур: "постановка вопроса" и "формулирование ответа", а затем их самостоятельному последовательному и взаимосвязанному осуществлению» [144]. И предлагает классификацию вопросно-ответных процедур по субъекту, проявляющему активность в постановке вопроса: «...мы построили классификацию вопросно-ответных процедур по признаку "субъект обучения, проявляющий активность в постановке вопроса" и выделили пять структурных типов...» [144].

Так и Н. С. Майкова в своём диссертационном исследовании рассматривает провоцирующие задачи как средство предупреждения ошибок учащихся при обучении геометрии [90]. Автор выделяет типы провокаций в задачах: «1) К задаче предлагается чертеж, содержащий ошибку. 2) Блоки задач, содержащие побуждение к применению неверной аналогии при

решении задачи. 3) Задача имеет неоднозначное решение. 4) Использование в вопросе слов: Верно ли, что...? Можно ли...? 5) Задача содержит противоречие в условии. 6) К задаче предлагается чертеж, который подсказывает не верное решение. 7) Ошибка в обосновании решения. 8) Предложенные к задаче варианты ответов содержат или несколько правильных ответов или не содержат правильного ответа» [90]. Новизна нашей работы состоит в смене функции вопроса. В существующих подходах умение формулировать вопрос рассматривается либо как отдельный приём, либо как инструмент получения нового знания. Мы предлагаем в рамках неосократического диалога вопрос рассматривать как средство установления связей между уже известными фактами и для построения целостного представления об изученном материале. Акцент, таким образом, смещается с открытия нового знания на рефлексию и структурирование имеющегося. Для геометрии это особенно существенно, поскольку теоремы, определения и свойства здесь не существуют порознь, а образуют систему. Именно этот аспект до сих пор не становился предметом специального рассмотрения.

Заметим, что даже в классах с углубленным изучением математики, согласно статистике ЕГЭ, задания по стереометрии (например, задачи на построение сечений, вычисление расстояний и углов) традиционно вызывают у учащихся наибольшие затруднения [203]. Одна из причин – недостаточно развитое пространственное мышление, как утверждают И. С. Якиманская [200], А. В. Гусев, А. В. Василенко [42] и др. Учащиеся испытывают трудности при мысленном оперировании пространственными образами, при установлении связей между элементами геометрической конструкции. Однако именно от учащихся классов с углублённым изучением математики ожидается полное, обоснованное решение стереометрических задач, часто с нестандартной конструкцией. Это требует не просто владения формулами и алгоритмами, но и умения видеть связи между элементами фигуры, выдвигать гипотезы о свойствах конструкции, перестраивать чертёж при изменении условия, аргументированно обосновывать каждый шаг.

Традиционная лекционная форма даёт готовые образцы, но не учит самостоятельно мыслить. Проблемный и эвристический диалоги подводят к открытию нового, но часто оставляют в стороне процесс связывания уже известных фактов в целостную картину. Неосократический диалог позволяет организовать обучение так, что учащиеся сами формулируют вопросы об исследовании геометрических объектов, выдвигают и проверяют гипотезы, сталкиваются с противоречиями, строят связи между отдельными фактами.

Опираясь на этапы неосократического диалога, описанные в первом параграфе (постановка общего неоднозначного вопроса, выявление противоречия на основе выдвинутых гипотез, расширение имеющегося знания, установление связей), определим его специфику применительно к стереометрическому содержанию. Оно устроено так, что плоский чертёж пространственного объекта часто подсказывает одно, а логика и теория диктуют другое, и часто именно на этом расхождении строится учебное исследование. Отсюда и цель неосократического диалога: развить у школьника умения, без которых такое исследование невозможно. Он должен научиться осознавать проблемную ситуацию, предлагать гипотезы, обосновывать свою позицию и проверять выводы, самостоятельно приходя к аргументированному результату. При этом нам важен не только итог, но и сам ход рассуждения, то есть какие гипотезы были выдвинуты, где обнаружилось противоречие. Не менее существенно, и чтобы отдельные геометрические факты не остались разрозненными, школьник должен выстраивать между ними связи и постепенно собирать их в общую картину. Именно эта способность находит своё выражение в выделении геометрической конструкции, служащей опорой для рассуждения: в ней фиксируются существенные отношения между элементами изучаемого тела.

К идее опорных геометрических конструкций В. В. Орлов обратился в диссертационных исследованиях [121]. В его определении такими конструкциями выступают фигуры, на которых иллюстрируется изучаемый теоретический материал, раскрываются связи объектов и формируются

приёмы поиска решения геометрических задач. В своём исследовании он доказывает, что опорная геометрическая конструкция может являться инструментом для организации самостоятельного поиска решения стереометрических задач.

Также идеей использования опорных конструкций при обучении стереометрии занимался О. Н. Щепин [198]. В своём диссертационном исследовании автор развивает наглядно-конструктивный подход к преподаванию стереометрии, в рамках которого все опорные конструкции сводятся к двум основным: произвольному тетраэдру и прямоугольному тетраэдру, а также их модификациям. О. Н. Щепин разрабатывает методику введения теоретического стереометрического материала при использовании только этих конструкций при изучении аксиом, теорем о параллельности и перпендикулярности в пространстве. Результаты его экспериментальной работы подтверждают, что такой подход способствует развитию пространственных представлений учащихся и повышает эффективность усвоения стереометрического материала.

Также стоит отметить исследование С. И. Кийко, в котором рассматривается этот вопрос со стороны совокупности опорных конфигураций. Под опорными конфигурациями С. И. Кийко понимает «совокупность геометрических объектов, связанных определёнными отношениями, обладающих статичностью и служащих наглядной базой для перехода от содержания задачи к её решению» [70]. Ею выделены и классифицированы опорные конфигурации по объектам стереометрии (многогранники и круглые тела), методам и уровню сложности (учебная, конкурсная, олимпиадная стереометрия). Разработанная методика включает формирование у учащихся банка образов памяти типичных геометрических ситуаций и приёмов работы с ними.

Таким образом, мы рассматриваем опорные конструкции как средство, объединяющее теоретическое знание и практику решения задач. При этом мы расходимся с подходом О. Н. Щепина. Он отводит опорным конструкциям роль

средства введения теории. Учитывая работы С. И. Кийко и В. В. Орлова об использовании конструкций в процессе решения задач, стоит отметить, что в нашей концепции они становятся результатом обобщения и систематизации знаний. Конструкция фиксирует связи, которые были установлены в ходе неосократического диалога. Она же становится опорой для дальнейшей работы, а также иллюстрацией гипотез в рамках неосократического диалога, так как их отдельные элементы и подвергаются сомнению.

Неосократический диалог при обучении стереометрии следует начинать с вопроса понятного учащимся. Он должен быть направлен на исследование пространственных конструкций и не иметь однозначного ответа. В стереометрии таким вопросом может стать задание, связанное с варьированием условия или заключения задачи. Например: «Сколько общих точек может иметь прямая в пространстве с гранями куба?». Такие вопросы связаны с особым типом задач. В методической литературе их называют частично открытыми задачами. Закрытая задача имеет единственный верный ответ и фиксированный способ решения, а частично открытая задача должна содержать элемент неопределённости. Она может допускать несколько способов решения и несколько возможных ответов, а также требовать самостоятельного выбора недостающих данных. Именно такие задачи создают основу для содержательного обсуждения, так как не предполагают движения к единственному заранее известному результату.

Неосократический диалог начинается с вопроса, все направления которого учитель заведомо предвидеть не может. Ученик сам исследует связи между элементами, и ответов здесь может быть много. Например: «Как зависит форма сечения многогранника от положения секущей плоскости?» Или другой вопрос: «Какие способы задания прямой в пространстве наиболее удобны для решения разных типов задач?» Вторая специфика касается гипотез, которые выдвигают учащиеся. В стереометрии это может быть предположение о том, что точка лежит в плоскости, что две прямые пересекаются или скрещиваются, что сечение имеет определённую форму и

др. В отличие от планиметрии, где многие соотношения могут быть непосредственно проверены измерением на чертеже, в стереометрии проверка гипотез требует развитого пространственного мышления и умения мысленно оперировать пространственными образами. Именно диалог позволяет сделать этот процесс явным: учащиеся высказывают свои предположения, обсуждают их с одноклассниками и учителем, что способствует осознанию оснований, на которых строится каждая гипотеза.

На этапе выявления противоречия учитель с помощью вопросов анализирует с учащимися предложенные гипотезы и подводит их к осознанию противоречия или неполноты, если таковые имеются. Специфика стереометрии здесь проявляется в том, что противоречие чаще всего возникает на стыке наглядного представления (то, что «кажется» верным на чертеже) и логического вывода (вытекающего из аксиом и теорем) или двух разных способов рассуждения, приводящих к разным результатам, либо частного случая и общего правила. Например, учащиеся могут ошибочно полагать, что прямая, параллельная одной из скрещивающихся прямых, будет параллельна и другой. Учитель задаёт вопросы: «А что будет, если мы возьмём прямую, параллельную первой, но не лежащую с ней в одной плоскости?», «Всегда ли сохраняется параллельность?», «Что произойдёт, если мы рассмотрим другую пару скрещивающихся прямых?». Так он постепенно подводит учащихся к тому, что они сами осознают ошибку. Готового ответа такие вопросы не содержат, они побуждают ученика мысленно конструировать пространственные образы. Их же они должны сверять и с логическими основаниями.

Заметим, что проблемный диалог завершается формулировкой нового правила или алгоритма. В свою очередь несократический диалог устроен иначе. Он нацелен на установление связей между известными фактами. Результатом такого диалога при обучении стереометрии становится опорная геометрическая конструкция, фиксирующая существенные отношения между элементами фигуры (пересечение, параллельность, перпендикулярность,

принадлежность). Эта конструкция служит для ученика своеобразным каркасом, на который в последствии можно будет опираться при решении более сложных задач. Процесс диалога и заключается в совместном выстраивании такой конструкции, которая отражает найденные связи.

Таким образом, несократический диалог при обучении стереометрии в классах с углублённым изучением математики представляет собой вид учебного диалога, который начинается с общего неоднозначного вопроса, инициированного частично открытой стереометрической задачей. Он нацелен на развитие у учащихся умений самостоятельно анализировать геометрическую ситуацию, выдвигать и проверять гипотезы, выявлять противоречия между наглядностью и логикой. Результатом такого диалога становится обобщение имеющихся знаний через установление связей между ними и оформление этих связей в виде опорной стереометрической конструкции. Несократический диалог сохраняет ключевые черты сократического метода, а именно вопрошание, майевтику, отказ от прямой трансляции знания, но адаптирует их к предметному содержанию и задачам углублённого изучения математики.

Так, специфика использования несократического диалога на стереометрическом материале определяется тремя аспектами: средством выступают специально подобранные частично открытые стереометрические задачи, требующие исследования пространственных связей; процесс представляет собой последовательное выдвижение и опровержение (уточнение) гипотез через систему вопросов, направленных на преодоление противоречий между чертежом и логикой, частным и общим случаем; результатом является освоение способа исследования и построение связной геометрической конструкции, отражающей существенные свойства фигуры.

Так, в данном параграфе решены следующие задачи:

Проведен анализ научно-методической литературы, который показал, что в обучении математике наиболее распространён проблемный диалог, специфика которого обусловлена работой с абстрактными понятиями,

строгостью доказательств и многовариантностью решений. Выявлено, что исследований, посвящённых применению несократического (или сократического) диалога в обучении математике, крайне мало. При этом отмечено, что несократический диалог обладает важными особенностями (подлинная неоднозначность вопроса, акцент на процессе обсуждения, стимулирование самостоятельной постановки вопросов), которые необходимо развивать в классах с углублённым изучением математики.

Установлено, что при использовании несократического диалога умение задавать вопросы предлагается использовать как средство установления связей между уже известными геометрическими фактами.

Сформулировано определение несократического диалога при обучении стереометрии, как вида учебного диалога, начинающегося с общего неоднозначного вопроса, инициированного частично открытой задачей. Он нацелен на развитие умений самостоятельно анализировать геометрическую ситуацию, выдвигать и проверять гипотезы, выявлять противоречия между наглядностью и логикой. При этом опорная геометрическая конструкция, фиксирующая отношения между элементами фигуры, является его результатом.

Определена специфика несократического диалога на стереометрическом материале. Прежде всего, она касается средства обучения – частично открытые стереометрические задачи. В связи с тем, что в них есть неопределённость, необходимая для постановки первого неоднозначного вопроса. Также специфика связана с построением самого процесса, в ходе которого ученики последовательно выдвигают гипотезы и проверяют их, а система вопросов помогает обнаружить противоречие между наглядным образом пространственной конфигурации и логическим обоснованием её свойств. Наконец, школьники создают опорную стереометрическую конструкцию, которая отражает существенные отношения между элементами тела и фиксирует связи между его свойствами.

§3. Роль несократического диалога для развития учебно-исследовательских умений при обучении стереометрии учащихся классов с углубленным изучением математики

Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (ФГОС СОО) подчеркивает необходимость развивать учебно-исследовательские умения. Школьник должен научиться самостоятельно определять задачу исследования, уметь выдвигать гипотезы, анализировать полученные результаты и критически оценивать их достоверность.

Для углублённого уровня изучения математики требования ФГОС СОО усиливаются. Стандарт предписывает развивать исследовательские умения, то есть способность ставить и решать исследовательские задачи, осознавать научный подход к изучению окружающего мира. Углублённый уровень повышает требования к предметным знаниям и развивает внутрипредметные связи, что требует целенаправленного формирования в процессе обучения математике.

Проблема исследовательской деятельности школьников имеет в отечественной педагогике развёрнутую теоретическую базу. А. С. Обухов рассматривает исследовательскую позицию личности как: «выработанная способность личности искать и осознавать проблемы; осознанно, активно и конструктивно реагировать на проблемную ситуацию...» [112]. При этом автор подчёркивает, что «эффективность осуществления исследовательской деятельности, как в профессиональной сфере, так и в повседневной практике, связана с развитостью и устойчивостью исследовательской позиции личности. Выработка исследовательской позиции к миру, к другим, к себе самому происходит в онтогенезе во взаимосвязи с условиями развития, в ходе осуществления деятельности. Развитая исследовательская позиция позволяет человеку успешно взаимодействовать с изменяющимися реалиями внешнего мира, социального окружения, а также с субъективной реальностью» [112].

Эта способность напрямую связана с задачами школьного обучения.

А. В. Леонтович рассматривает исследовательскую деятельность в культурно-историческом контексте и отмечает, что с возникновением науки исследование обретает собственную историю и методологию. Однако он принципиально разводит научное и учебное исследование: «Исследования в науке и образовании – весьма различные вещи. Учебно-исследовательская деятельность идентична научно-исследовательской по применяемому в ней научному методу, но существенно отличается по уровню сложности, методикам... и направлена в первую очередь на развитие учащихся» [87]. Для нашего анализа это различие существенно, так как оно задаёт рамку, внутри которой учебное исследование ориентировано на формирование самого исследовательского способа действия.

Для методики обучения математике важны работы И. В. Клещевой [73, 74], посвящённые организации проектно-исследовательской деятельности школьников и её методическому обеспечению. Вслед за ней мы будем понимать учебно-исследовательскую деятельность как познавательную активность, которая побуждается собственным интересом учащегося и направляется осознанной целью. Она включает сбор и упорядочение данных, выдвижение предположения, его проверку и оформление итогового вывода. Далее, говоря об учебно-исследовательской деятельности, мы и будем придерживаться этой трактовки.

Иные исследователи, например В. А. Далингер, делают акцент на внешней организации такой учебной работы [46]. В его трактовке учебно-исследовательская деятельность предстаёт как особым образом выстроенный учебный процесс: «Под учебно-исследовательской деятельностью учащихся понимается учебная деятельность по приобретению практических и теоретических знаний с преимущественно самостоятельным применением научных методов познания, что является условием и средством развития у обучающихся творческих исследовательских умений» [46]. В нём педагог руководит изучением различных объектов, а сама процедура приближена к

этапам научного поиска: «...наиболее приемлемыми являются следующие этапы исследования: 1. Мотивационная деятельность; 2. Постановка проблемы; 3. Сбор фактического материала; 4. Анализ полученных материалов; 5. Выдвижение гипотезы; 6. Проверка гипотезы; 7. Доказательство истинности гипотезы; 8. Вывод» [46]. Нетрудно заметить, что перечисленные этапы соответствуют логике понимаемого нами учебного исследования: учащийся проходит путь от мотивации и постановки проблемы через сбор материала, выдвижение и проверку гипотезы к доказательству и итоговому выводу.

При этом позиция И. В. Клещевой представляется более продуктивной для нашей работы, поскольку она обращена к внутренним механизмам деятельности учащегося. Именно такой ракурс отвечает задаче целенаправленного формирования исследовательских умений при обучении математике в классах с углублённым изучением. Таким образом, мы трактуем учебно-исследовательские умения как те, которые приобретаются учеником исключительно в процессе учебно-исследовательской деятельности и являются её результатом.

И. В. Клещева, в своем исследовании выделяет следующие учебно-исследовательские умения: умение видеть проблему и переформулировать ее на математический язык, умение выдвигать гипотезы и проверять их на частных случаях, умение проводить аналогии и обобщать полученные результаты, умение анализировать границы применимости полученных выводов [73]. В рамках математических дисциплин именно названные умения образуют ту основу, которая обеспечивает проведение учебных исследований.

Идеи исследовательского подхода в обучении математике активно разрабатывается современными учёными-методистами.

Фундамент данного направления заложен учёными-классиками: В. Г. Болтянским, Ю. М. Колягиным, А. И. Маркушевичем, А. А. Столяром и др. [24, 78, 94, 168], в трудах которых убедительно

обоснована положительная роль исследовательской деятельности в обучении математике.

Современный этап развития исследовательского подхода характеризуется как углублением теоретических основ, так и разработкой прикладных методических аспектов. На теорию формирования исследовательских умений школьников в обучении математике заметно повлияли работы нескольких учёных. Среди них следует назвать прежде всего Н. Л. Стефанову, Л. Н. Тимофееву и И. В. Клещеву. Каждый из этих авторов предложил свой взгляд на то, какие именно умения нужно развивать у учащихся и как это делать в процессе обучения математике.

На наш взгляд, в статье Л. Н. Стефановой «Проблема развития исследовательских умений учащихся с позиции метаметодического подхода» представлен методический подход, который акцентирует развитие исследовательских умений для проведения самостоятельных исследований [167]. Она выделила три группы умений: мыслительные, инструментальные и предметные. Главный результат её исследований состоит в том, что, во-первых, учебно-исследовательская деятельность должна носить системный характер, а, во-вторых, исследовательскую позицию нужно формировать прежде всего у самого учителя математики.

Проблему выявления и систематизации исследовательских умений, необходимых учащимся при освоении математики, рассматривает в своей диссертации Л. Н. Тимофеева [173]. В работе представлен классифицированный перечень таких умений: «1) умение выявлять существенные свойства понятий; 2) умение устанавливать отношения между понятиями; 3) умение выявлять математические закономерности; 4) умение формулировать, записывать в различных формах, математических моделях одно и то же утверждение; 5) умение анализировать задачу, уравнение, формулу и т. п.; 6) умение выделять понятия, свойства, теоремы, утверждения, применимые к решению задачи, доказательству теоремы; 7) умение устанавливать аналогию методов решений задач; обнаруживать их

структурные сходства; 8) умение формулировать учебную проблему, выдвигать гипотезу; 9) умение проверять гипотезу в частных случаях; 10) умение разбивать задачу на подзадачи (выделять логические составляющие математической задачи); 11) умение строить алгоритм решения задачи, проблемы; 12) умение находить различные варианты решения задач, доказательства теорем; 13) умение делать обобщающие заключения, выводы» [173]. Также в работе указано, что эти умения классифицируются по группам: «Тогда выделенные нами исследовательские умения, в свою очередь, можно классифицировать как общие исследовательские умения (исследовательские умения 5, 8, 9, 13), специфические (исследовательские умения 4, 7, 10, 12) и базовые исследовательские умения (исследовательские умения 1, 2, 3, 6, 11)» [173].

Приведённые перечни исследовательских умений различаются по степени детализации. Заметим, что И. В. Клещева выделяет укрупнённые умения, которые задают общую логику исследования, идущую от постановки проблемы к анализу границ применимости выводов. А Л. Н. Тимофеева раскрывает операциональную сторону исследовательской деятельности. Оба подхода описывают одно явление с разной мерой дробности. В настоящей работе мы опираемся на структуру И. В. Клещевой, а перечень Л. Н. Тимофеевой используем для конкретизации действий учащихся при работе со стереометрическим материалом.

Особое место в ряду фундаментальных исследований, посвящённых методологическим основаниям организации учебного процесса, ориентированного на развитие исследовательских умений учащихся, занимает концепция «образования как учебной модели науки», сформулированная академиком А. А. Самарским. В своей работе «Неизбежность новой методологии» он утверждал, что в условиях стремительного устаревания знаний необходимо совершить переход «...от безнадежно устаревшего "справочного" знания к образованию научному», которое является «в некотором смысле моделью науки и отражает динамику научно-технического

прогресса» [147]. Суть этой идеи заключается в том, чтобы учебный процесс воспроизводил логику реального научного поиска: от столкновения с проблемой и выдвижения гипотез через построение моделей и эксперименты к формулировке обоснованных выводов.

В свою очередь, в методике обучения математике концепция А. В. Ястребова «обучение математике как модель научных исследований» [197], методологически опирающаяся на его диссертационное исследование «Моделирование научных исследований как средство оптимизации обучения студента педагогического вуза» [198], созвучна с идеями А. А. Самарского, но конкретизирует их применительно к предметному содержанию математики. Заметим, что А. А. Самарский задаёт философско-методологический вектор развития образования в целом. В свою очередь А. В. Ястребов предлагает практико-ориентированную модель. В ней учебная деятельность строится по образцу реального научного исследования. Учащиеся последовательно ставят проблему, выдвигают гипотезы и проверяют их так же, как это делает учёный в реальном исследовании.

Отметим, что в методике обучения физике сложился похожий подход. Например, А. С. Кондратьев обосновывает необходимость строить обучение физике как воспроизведение логики научного исследования [80]. Он называет несколько обязательных шагов: постановка проблемы, выдвижение гипотез, проведение мысленного или компьютерного эксперимента и анализ границ применимости полученных результатов. А. С. Кондратьев особенно настаивает на единстве трёх составляющих физической науки, а именно экспериментальной, теоретической и вычислительной физики. При таком подходе ученик не заучивает готовые формулы, он разбирается в том, как они возникают, как строится и проверяется модель и где проходят границы её применимости. В математике ситуация складывается похожим образом, что становится созвучно идее неосократического диалога. Через систему вопросов и обсуждение гипотез диалог ведёт учащихся к самостоятельному установлению связей между геометрическими фактами. Так неосократический

диалог на практике воплощает «учебную модель науки» в математическом образовании.

Исследовательский подход в обучении математике получил дальнейшее развитие в диссертационных исследованиях начала 2000-х годов. Учебно-исследовательскую деятельность стали понимать как постоянную составляющую обучения, а не как отдельный приём. Например, в работе М. В. Тарановой показано, что учебно-исследовательская деятельность повышает эффективность обучения математике в профильных классах. Отметим, что Н. А. Меньшикова в своей диссертационной работе «Учебно-исследовательская математическая деятельность в средней школе как фактор приобщения к будущей научной работе» в том же году пришла к выводу, что развитие исследовательской деятельности на уроках математики способствует формированию у учащихся интереса к дальнейшему участию в научных проектах [102].

Особого внимания заслуживает фундаментальная теория исследовательского обучения А. И. Савенкова, в которой умение задавать вопросы рассматривается как базовое исследовательское умение, подлежащее специальному формированию [145]. В своих работах ученый обосновывает необходимость целенаправленного обучения детей постановке вопросов как инструмента самостоятельного познания, подчеркивая, что именно вопрос, инициированный самим учеником, является отправной точкой исследовательского поиска и свидетельствует о переходе от пассивного восприятия к активной мыслительной деятельности. В его теории исследовательское поведение не является врожденным, а требует систематического развития через специально организованные процедуры, включающие обучение постановке вопросов, выдвижению гипотез и интерпретации полученных результатов.

Важным этапом в развитии теории исследовательского обучения стало диссертационное исследование А. А. Ушакова, в котором получили дальнейшее развитие идеи системного формирования исследовательских

умений [181]. Существенный вклад в методику организации исследовательского обучения в основной школе внесла М. А. Павлова, обосновав эффективность использования системы динамической геометрии во внеурочной деятельности учащихся [126].

В 2020е годы внимание исследователей сместилось в сторону начального этапа основного общего образования и интеграции исследовательского подхода с современными образовательными форматами. Е. В. Алексеева в своей диссертации раскрыла особенности организации исследовательской деятельности учащихся 5-6 классов в процессе обучения математике [8]. Также интересная для нас работа М. В. Фалилеевой, посвященная исследовательской и проектной деятельности учащихся по математике. Автор акцентирует взаимосвязь исследовательского и проектного методов [183].

Наконец, наиболее близкий к нашей теме подход предлагает Т. П. Альгешкина, которая рассматривает наставничество как важную составляющую реализации исследовательской деятельности на уроках математики [10]. Она подчёркивает: «Наставничество – это не просто передача знаний. Это доверие к потенциалу другого человека. Это готовность идти рядом, а не впереди. Это умение услышать вопрос, даже если он ещё не сформулирован вслух... суть наставничества: не дать рыбу, не даже научить ловить – а вместе найти реку, где она течёт, и выбрать, каким способом ловить»» [10]. В её работе показано, как исследовательская деятельность становится основой индивидуальной траектории ученика. Именно эта логика, при которой содержание исследования вырастает из вопроса самого ученика, и будет положена в основу разрабатываемой методики.

Отдельные аспекты реализации исследовательского подхода при обучении математике нашли отражение в целом ряде современных частных исследований.

Например, Д. В. Бочкарева и В. Р. Майер рассматривают реализацию исследовательского подхода с использованием программы GeoGebra при проведении лабораторных работ на уроках математики [27]. Авторы

показывают, что интеграция лабораторных работ и динамической геометрической среды позволяет учащемуся последовательно пройти этапы научного поиска. В статье доказывается, что такой подход формирует у школьников исследовательские умения и повышает познавательную мотивацию. Особенно ценно для нашего исследования следующее наблюдение авторов: «Таким образом, школьники или студенты могут самостоятельно опытным путем вывести формулы для нахождения координат векторов, их длин, результатов операций с ними и т.д. В таком случае они точно поймут и запомнят материал, ведь он будет являться их личным открытием» [27].

Решение текстовых задач с прикладным содержанием через исследовательский подход рассматривает С. А. Павленко [124]. Автор подчёркивает: «Деятельность учащихся при решении прикладной задачи последовательно содержит в себе все составляющие, характерные для этапов учебного исследования: формулировка проблемы; поиск гипотезы; возможные пути получения результата; решение проблемы» [124]. В отличие от этого подхода, Д. В. Бочкарева и В. Р. Майер строят решение геометрических и алгебраических задач в среде GeoGebra, опираясь на наглядность, а С. А. Павленко же интересуется содержательная интерпретация условия. Техника вычислений у нее отходит на второй план, а на первый выходит разбор реальной ситуации. Именно такой акцент на содержании, а не на вычислениях, и будет учтён в разрабатываемой методике.

В классах с углублённым изучением математики перечень учебно-исследовательских умений нуждается в уточнении. К ним относятся умения ставить исследовательский вопрос о свойствах пространственных конфигураций, выдвигать и проверять предположения о связях между элементами, мысленно преобразовывать чертёж с построением пространственной модели и выбором метода решения, анализировать ошибки переноса планиметрических представлений, оценивать стратегию и обобщать результат на классы пространственных фигур.

По этим умениям могут быть определены уровни их сформированности. Высокий уровень предполагает самостоятельное выдвижение учащимся исследовательских вопросов и гипотез без опоры на образец. Средний уровень связан с выполнением исследовательских действий при направляющей поддержке учителя. А низкий уровень ограничивается действиями по образцу или по алгоритму.

Эти умения естественно формируются в диалоге. Ученик или учитель, в зависимости от уровня, ставит вопрос, который помогает понять, что именно искать. Обсуждая гипотезы, школьник учится рассуждать предположительно. Чтобы двигаться дальше, нужно обнаружить противоречие между высказанными гипотезами или между гипотезой и чертежом. В совместном поиске ученик приобретает опыт действия, а не только рассуждения. Наконец, обсуждение результата заканчивает работу. Поэтому несократический диалог, а не эвристическая беседа или проблемный диалог в их обычном виде, оказывается здесь наиболее эффективным

Эти умения, естественно, формируются в диалоге. Ученик или учитель, в зависимости от уровня, ставит такой вопрос, который поможет ему понять, что именно искать. Обсуждая гипотезы, он учится рассуждать предположительно, а в совместном поиске приобретает опыт действия, а не только рассуждения. Наконец, обсуждение результата замыкает работу. Именно поэтому несократический диалог, а не эвристическая беседа или проблемный диалог, здесь наиболее эффективны.

В статье И. С. Павловой и Е. П. Вдовина «Метод вопрошания в системе современного урока» подчёркивается, что правильно организованный диалог является ключом к развитию критического мышления и одновременно способствует росту учебной мотивации к занятиям математикой [125]. Авторы описывают систему вопросов, упорядоченную по степени вовлечённости учащихся в исследовательскую деятельность: «Методологически грамотно составленные, отвечающие определенным целям и выполняющие конкретные задачи, они способны пробудить интерес учащихся к поисково-

исследовательской деятельности на уроке, способствуя формированию критического математического мышления» [125].

В этой связи неосократический диалог может рассматриваться как один из инструментов исследовательского подхода. Логика его построения обнаруживает соответствие логике учебно-исследовательской деятельности: формулирование проблемы, которая задаётся общим неоднозначным вопросом; выдвижение гипотез и их проверка с использованием контрпримеров; формулирование вывода. При этом неосократический диалог обладает потенциалом для целенаправленного развития тех групп исследовательских умений, которые связаны с обобщением и установлением аналогий, поскольку последовательное прохождение этапов диалога подводит участников к самостоятельному формулированию общих закономерностей на основе анализа частных случаев.

Напомним, что в типологии Х. Банча и Б. Белла неосократический диалог относится к промежуточным уровням исследовательского обучения; в контексте данной работы мы ориентируемся на третий уровень, в наибольшей степени способствующий становлению субъектной позиции школьников.

Так, неосократический диалог позволяет последовательно задействовать каждую из выделенных групп исследовательских умений. Постановка исходного неоднозначного вопроса побуждает учащихся к формулированию исследовательской задачи. Обсуждение выдвинутых предположений через серию уточняющих вопросов развивает умение проверять гипотезы. Выбор способа решения и построение пространственной модели происходят непосредственно в ходе совместного поиска, что задействует операциональную группу умений. Наконец, умения, связанные с оценкой стратегии и обобщением результата развивают ситуации, когда необходимо проанализировать ошибки, обнаружить противоречия и подвести итоги.

Рассмотрим особенности формирования отдельных исследовательских умений посредством неосократического диалога.

Неосократический диалог начинается с общего неоднозначного вопроса. Ответ на него не очевиден, и взять его из учебника или вывести по известному правилу нельзя. Ученик оказывается в ситуации, где гипотеза у каждого может быть своя. Именно поэтому регулярное участие в таких диалогах постепенно вырабатывает готовность высказывать предположения. Например, учитель показывает новую геометрическую конструкцию и спрашивает: «Как вы полагаете, каким будет взаимное расположение этих прямых?» Ученику ничего не остаётся, кроме как высказать гипотезу, опираясь на уже имеющиеся знания. Здесь же формируется и критическое отношение к предположениям.

Отдельного разговора заслуживает умение задавать вопросы. В традиционном обучении их ставит преимущественно учитель. В логике неосократического диалога продвижение от исходного вопроса к выводу требует, чтобы новые вопросы постоянно порождал еще сам ученик, спрашивая себя, одноклассника, учителя. Учитель лишь помогает сделать эти вопросы содержательными, то есть направленными не на воспроизведение фактов, а на выявление оснований, поиск скрытых допущений, проверку границ применимости правила. Например, ученик может спросить одноклассника: «Почему ты утверждаешь, что эти плоскости пересекаются? Какие признаки позволяют сделать такой вывод?»

Отсюда следующее умение – аргументация. Вопросы учителя здесь устроены так, чтобы обнаружить противоречие в рассуждении ученика. Причём цель не только в опровержении, противоречие показывает и ограниченность позиции. Речь идёт не о доказательстве от противного, а о внутреннем противоречии в самом рассуждении. Допустим, ученик утверждает, что «Если прямая перпендикулярна двум прямым в плоскости, то она перпендикулярна самой плоскости». Учитель может задать вопрос: «А это верно для любого расположения прямых на плоскости?» Перебирая варианты, ученик обнаруживает: условие перпендикулярности двум параллельным прямым недостаточно. Так он осознаёт, что в признаке требуется именно пересечение прямых. Контрпример, найденный в диалоге, уточняет исходное

утверждение и демонстрирует важную особенность несократического диалога – приведение к противоречию со своими тезисами.

Таким образом, несократический диалог обладает значительным потенциалом для развития учебно-исследовательских умений учащихся. В ходе такого диалога формируются умения выдвигать гипотезы, критически оценивать предположения и обнаруживать противоречия, задавать вопросы, аргументировать свою позицию, а также обобщать полученные результаты и формулировать выводы.

Так, в данном параграфе решены следующие задачи:

1. Установлено, что ФГОС СОО предписывает формирование учебно-исследовательских умений как обязательного метапредметного результата, а для углублённого уровня изучения математики эти требования усиливаются, что обосновывает необходимость целенаправленного развития исследовательских умений в процессе обучения стереометрии.

2. Уточнено содержание понятия «учебно-исследовательская деятельность» как деятельность, которая побуждается собственным интересом учащегося и направляется осознанной целью.

3. Выявлены теоретические основания исследовательского подхода в обучении математике, заложенные в трудах учёных-классиков (В. Г. Болтянский, Ю. М. Колягин, А. И. Маркушевич, А. А. Столяр) и получившие развитие в современных исследованиях (Н. Л. Стефанова, Л. Н. Тимофеева, И. В. Клещева, А. В. Ястребов и др.).

4. Уточнены специфические исследовательские умения развиваемые при обучении стереометрии: поставить содержательный математический вопрос о свойствах пространственной фигуры, выдвинуть и проверить предположение о связи между её элементами, преобразовать пространственную модель и выбрать метод решения, проанализировать ошибку и обобщить результат. Уровень овладения этими умениями может различаться.

5. Обосновано, что естественной организацией процесса обучения для формирования исследовательских умений является несократический диалог, так как его логика совпадает с логикой учебно-исследовательской деятельности.

6. Выявлено, как формируются ключевые исследовательские умения посредством несократического диалога. К ним относятся умение выдвигать гипотезы и критически оценивать предположения, обнаруживать противоречия и умение задавать содержательные вопросы, аргументировать свою позицию. Особенного внимания для работы заслуживает умение обобщать результаты и формулировать выводы.

§4. Частично открытые задачи как средство использования несократического диалога при обучении стереометрии учащихся классов углубленным изучением математики

Задача в методике обучения математике давно стала главным дидактическим средством. Теорию учебных математических задач разрабатывали Ю. М. Колягин, В. А. Гусев, Г. И. Саранцев, Л. М. Фридман, А. А. Столяр и другие исследователи [77, 43, 148, 189, 168]. Их работы обосновали задачный подход к обучению. Его суть заключается в том, что учебный процесс строится вокруг системы задач. Понятия, теоретические факты и методы изучаются в той логике, в какой они нужны для решения задач. Новое знание возникает у учащихся по ходу решения задач.

Ю. М. Колягин первым описал структуру математической задачи: условие, заключение, решение и базис. Такая структура удобна и для анализа готовых задач, и для конструирования новых.

Другая традиция связана с делением задач по степени определённости их структуры. Так, выделяют открытые задачи, частично открытые и закрытые. Основы этого подхода заложил Дж. Гилфорд. Он ввёл понятие «дивергентное мышление» и предложил использовать задачи открытого типа как средство его диагностики. Закрытая задача, по Дж. Гилфорду, имеет фиксированное количество верных ответов (часто один), тогда как открытая задача допускает большое (или бесконечное) множество правильных решений, что и требует дивергентного мышления. Именно эту особенность автор описывает так: «Особенность конечного мыслительного продукта, получаемого с помощью дивергентного мышления, – это разнообразие возможных ответов. Конечный мыслительный продукт полностью не определяется данной информацией» [35]. Для нашего исследования это различие важно потому, что диагностика исследовательских умений требует именно такой особенности, когда ученик не воспроизводит известный способ решения, а выстраивает его сам.

Понятие «открытая задача» развито также в теории решения изобретательских задач, в работах Г. С. Альтшуллера и его последователей [11, 12]. В этой традиции открытой считается задача с неполным или неопределённым условием, допускающая множество решений и неоднозначный ответ. Автор пишет: «Первоначальную формулировку проблемы в ТРИЗ принято называть изобретательской ситуацией. <...> В изобретательской задаче все иначе: в процессе решения может выясниться, что найти надо не X, а Y и для этого нужны не А и Б, а В и Г» [11]. Для нашего исследования существенно, что обе традиции сходятся в одном: открытая задача не имеет единственного предсказуемого пути решения.

В отечественной дидактике теория открытых задач получила развитие в работах А. В. Хуторского, создателя дидактической эвристики. Он определяет открытое задание как задание, которое не имеет однозначных «правильных» ответов, а его цель – создание учеником «личного образовательного продукта». Автор пишет: «В эвристическом обучении ученик изначально конструирует знания в исследуемой области реальности. Для этого ему предлагается реальный значимый объект (природное явление, историческое событие, материал для конструирования и т.п.), но не готовые знания о нем. Полученный учеником продукт деятельности (гипотеза, сочинение, поделка и т.п.) затем с помощью учителя сопоставляется с культурно-историческими аналогами – известными достижениями в соответствующей области» [193]. Принципиальное отличие подхода дидактической эвристики от ТРИЗ заключается в том, что в ТРИЗ учат как придумывать новое (методология изобретательства), а в дидактической эвристике делается акцент на вопросе зачем это делать, то есть на самореализации и уникальном результате для каждого конкретного учащегося.

Значительный вклад в развитие представлений об открытых задачах внёс А. А. Гин [36]. У него открытые задачи – это задачи, в которых не всегда понятно условие, отсутствует чёткий стандартный путь решения, возможны разные варианты ответа. Он прямо противопоставляет их задачам закрытого

типа: «Какие задачи решают в школе? Так называемые "закрытые" задачи, то есть точное условие (из пункта А в пункт Б...), строгий алгоритм решения, единственно верный ответ. А какие задачи ставит перед человеком жизнь? Открытые задачи! Имеющие достаточно размытое, допускающее варианты условие... разные пути решения, набор вероятных ответов» [36]. Согласно А. А. Гину иллюстрация отличий структуры открытой задачи от закрытой можно представить следующей схемой (см. схему 1).

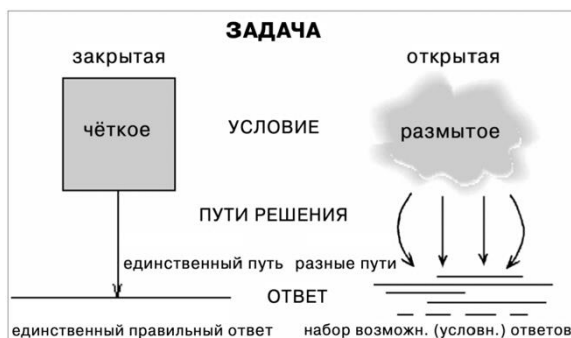


Схема 1. Иллюстрация А.А. Гина

Понятие «частично открытая задача» встречается у П. М. Горева, В. В. Утёмова и И. С. Зыкова. Они развивают идеи А. А. Гина применительно к теории решения изобретательских задач и к развитию креативности школьников. Один из них, П. М. Горев, в работах по проектированию креативных уроков математики рассматривает открытые задачи как средство включения школьников в самостоятельную работу [40]. Он подчёркивает: «В отличие от закрытых задач, типичных для школьного учебника математики, открытые задачи предполагают "размытое" условие, имеющее степень неопределённости, разнообразные (часто неалгоритмические) методы решения, набор разнообразных вариантов ответа» [40]. В его работах частично открытые задачи упоминаются как задачи, которые занимают промежуточное положение между закрытыми и открытыми и содержат элемент неопределённости лишь в отдельных компонентах структуры. Заметим, что задачи повышенного уровня сложности или задачи творческого характера из учебников, он также относит к частично открытым, подчёркивая, что условие и ответ в таких задачах могут быть достаточно ясными, а метод решения или

привлечение дополнительных сведений остаются открытыми. Точного определения частично открытой задачи П. М. Горев не вводит, критерии отнесения задачи к данному классу в его работах отсутствуют. Он описывает такие задачи через примеры и их место в учебном процессе, что оставляет пространство для дальнейшего уточнения понятия.

В свою очередь В. В. Утёмов в диссертационном исследовании, посвящённом разработке системы задач открытого типа как средства развития креативности учащихся основной школы, рассматривал эти задачи в контексте формирования продуктивного мышления [179]. Он выстраивает задачи по степени нарастания открытости: «Умения формируются последовательно на основе задач первого уровня открытости с постепенным включением задач более высокого уровня открытости» [179]. При этом В. В. Утёмов различает «задачи, где требуется использовать средство, прямо предназначенное для данной цели, задачи, предполагающие модернизацию или адаптацию предложенного метода, и задачи, для решения которых необходимо получить решение, принципиально отличающееся от рассмотренного метода» [179]. При этом он называет данную шкалу типизацией частично открытых задач, что создаёт терминологическую неопределённость. Частично открытые задачи у него не выделены как самостоятельный класс, они растворены в шкале уровней открытости. Классификация констатирует степень открытости, но не раскрывает её содержание. Точного определения частично открытой задачи В. В. Утёмов не вводит. Его классификация строится по формальному признаку, отражающему, какой именно компонент задачи остаётся открытым, но не раскрывает содержательной природы неопределённости.

Обобщая подходы А. А. Гина, В. В. Утёмова, П. М. Горева и И. С. Зыкова, а также опираясь на структурный анализ компонентов задачи, предложенный Ю. М. Колягиным, под **частично открытой задачей** в настоящем исследовании понимается математическая задача, в которой элемент неопределённости, проявляющийся как недостаточность или избыточность данных, неоднозначность формулировки, наличие параметра,

множественность ответов или способов решения, присутствует не во всех, а лишь в отдельных компонентах её структуры, то есть в условии, заключении, решении или базисе.

Указанные проявления локализуются в условии, заключении, решении или базисе задачи. Это даёт основание отличать частично открытые задачи от закрытых. В закрытых задачах все компоненты определены, а в открытых напротив неопределённость затрагивает все компоненты.

На наш взгляд, предложенное определение решает две задачи. Оно помогает установить вид задачи: закрытая, частично открытая или открытая. Кроме того, становится основанием для типизации именно частично открытых задач, в основу которой мы закладываем характер учебного действия, которое требуется от учащегося. В соответствии с этим нами выделены пять типов, частично открытых задач. Проиллюстрируем это таблицей 2.

Таблица 2. – Типы частично открытых задач

Тип	Название	Характер учебного действия
I	Многозначность ответа	Связан с перебором допустимых вариантов, так как Условие допускает разные возможности
II	Многозначность метода решения	Предполагает перебор возможных подходов к обоснованию
III	Явная многозначность условия	Требует уточнить недостающие данные, так как без них условие не может быть понято однозначно
IV	Неявная некорректность условия	Связан с проверкой существования объекта, заданного в условии. Учащийся должен обнаружить скрытую некорректность исходных данных.
V	Неопределённость требования	Предполагает самостоятельную постановку содержательных вопросов к заданной ситуации

Заметим, что В. В. Утёмов строит типизацию по формальному признаку локализации неопределённости в структуре задачи. Мы же предлагаем типизацию, которая опирается на характер деятельности учащегося. Она также дает возможность диагностировать уровень сформированности соответствующих учебных действий и позволяет целенаправленно их развивать.

Заметим, что каждый из выделенных типов по-своему проявляется на стереометрическом содержании. Здесь стоит оговорить, что граница между типами не всегда очевидна. На практике задача может совмещать признаки двух типов, и тогда мы относим её к тому из них, чей признак выражен сильнее или в зависимости от того, какое учебное действие нам необходимо развить в большей степени на данном уроке.

Первый тип представляют задачи с многозначностью ответа. В них условие и требование определены, базис известен. Однако существует несколько верных ответов. Неопределённость возникает в ответе, а решение требует рассмотрения нескольких случаев. Приведём пример: «Сколько плоскостей можно провести через три точки пространства?» Учащемуся необходимо рассмотреть два случая в зависимости от того – точки лежат на одной прямой или нет. Каждый случай приводит к своему ответу. Специфика стереометрии проявляется здесь в том, что взаимное расположение точек в пространстве допускает разные конфигурации. Учащийся должен мысленно удерживать эти возможности, прежде чем дать окончательный ответ.

Второй тип составляют задачи с многозначностью метода решения. Условие и требование определены однозначно, однако неопределённость присутствует в базисе. Под базисом мы понимаем наличие нескольких теоретических оснований, на которые можно опереться при обосновании. Речь не идёт об отсутствии теоретических знаний. Пример: «Дана сфера и точка вне сферы. Обоснуйте, что касательная к сфере существует. Предложите два способа доказательства: геометрический и аналитический». Геометрический способ опирается на свойства взаимного расположения сферы и плоскости. Аналитический способ опирается на координатный метод. На стереометрическом содержании это различие проявляется особенно отчётливо. Один и тот же объект может быть описан и средствами синтетической геометрии, и аппаратом аналитической геометрии в пространстве.

Третий тип образуют задачи с явной многозначностью условия, связанной с недостатком данных. Учащийся доопределяет условие, вводит параметр или рассматривает дополнительные ограничения. От этого выбора зависит результат. Пример: «В прямоугольном параллелепипеде проведена плоскость, пересекающая ребро AB в точке M и ребро A_1D_1 в точке N . Определите возможные положения этой плоскости относительно ребра A_1B_1 ». В стереометрической задаче такого рода учащийся вынужден самостоятельно зафиксировать дополнительные условия. Две точки не задают плоскость однозначно в пространстве. Ответ зависит от того, какое именно положение плоскости будет выбрано.

Четвёртый тип представляют задачи с неявной некорректностью условия. Избыточность или противоречивость данных требует от учащегося проверки существования описанной фигуры. Неопределённость связана не с поиском вариантов ответа, а с анализом достоверности исходных данных. На стереометрическом содержании примером может служить задача: «В тетраэдре длины высот к граням соответственно 1, 2, 3 и 6. Найдите его объем». Учащийся должен обнаружить, что задача не имеет решения. Такого тетраэдра не существует. Он сможет доказать это через связь высот, площади и объема.

Пятый тип составляют задачи с неопределённым требованием. Условие задано, базис определён, однако само требование не сформулировано. Пример: «Дан прямоугольный параллелепипед. Какие геометрические факты о его диагоналях вы можете установить?». Учащиеся самостоятельно формулируют вопросы и находят на них ответы. В соответствии со спецификой стереометрического содержания, пространственная фигура допускает множество содержательных направлений исследования. Таких как взаимное расположение диагоналей, их равенство, пересечение или скрещивание, связь с рёбрами. Учащийся должен выбрать те из них, которые допускают математически корректную постановку вопроса и содержательный ответ.

Мы задались вопросом уточнения понятия частично открытая задача в связи с тем, что, на наш взгляд, именно такие задачи выступают естественным средством запуска несократического диалога. В связи с неопределенностью в условии задачи.

Предложенная типизация позволяет выбирать тип частично открытой задачи в зависимости от того, какое направление примет диалог. Задача с многозначностью ответа запускает обсуждение допустимости различных гипотез. Задача с многозначностью метода решения побуждает к отбору теоретических оснований и сопоставлению разных обоснований. Задача с неопределённым требованием ставит учащегося в позицию автора вопроса, что напрямую связано с умением формулировать проблему. Задача с некорректным условием создаёт ситуацию, в которой учащиеся вынуждены проверять достоверность исходных данных и обосновывать невозможность однозначного решения. Каждый тип активизирует то или иное учебно-исследовательское умение.

Существенный интерес для нашего исследования представляет также подход к классификации учебных заданий, разработанный В. В. Орловым в докторской диссертации в рамках теории обучающе-познавательных геометрических ситуаций (ОПГС) [121]. В традиционных геометрических задачах неизвестным является лишь численное значение, доказательство или алгоритм построения. ОПГС направлены на более широкий спектр познавательной деятельности, то есть на выдвижении гипотез, формулирование определений, поиск различных наборов достаточных условий, работу с образами геометрических объектов и изучение окружающего мира. Работа с ОПГС, как правило, предполагает развёрнутый текстовый сценарий, в который погружена геометрическая ситуация, что требует от учащихся умения удерживать внимание на содержании, выделять в нём математическую основу и выстраивать исследование в заданном контексте.

В структуре ОПГС В. В. Орлов выделяет четыре компонента: условие, требование, базис решения и решение. Категория «неизвестное» у него имеет два уровня. На первом находится объект исследования: теоретический факт, алгоритм, фигура, а на втором его обоснование или опровержение.

По степени определённости требования и необходимости самостоятельно формулировать результат В. В. Орлов различает ОПГС открытые, полуоткрытые, закрытые и комбинированные. Эта типология близка к предложенной в настоящем исследовании классификации частично открытых задач. В свою очередь полуоткрытые ОПГС, в которых неизвестны и способ обоснования, и сам факт истинности утверждения, можно отнести к типам III и IV. Комбинированные, предполагающие самостоятельную постановку вопросов, схожи с типом V. Эта закономерность подчеркивает тот факт, что частично открытые задачи не являются искусственным конструктом и вписываются в дидактическую традицию, в которой геометрическое задание служит средством организации познавательной деятельности учащегося.

Однако в работе В. В. Орлова акцент сделан на типологии ситуаций и их дидактических функциях, а мы же рассматриваем частично открытую задачу как средство инициирования и сопровождения несократического диалога.

Выбор в пользу частично открытых задач, а не ОПГС, обусловлен несколькими причинами. Частично открытая задача имеет локальную неопределённость, что позволяет удерживать диалог в границах конкретной математической ситуации. ОПГС, напротив, требует погружения в развёрнутый контекст. Однако на этапе становления методики это может рассеивать внимание и затруднять фиксацию отдельных исследовательских умений. Кроме того, частично открытая задача позволяет адресно активизировать конкретное учебно-исследовательское умение, тогда как ОПГС задействует их комплексно. Работа с ОПГС может составить перспективу дальнейшего исследования после того, как методика несократического диалога будет отработана на конкретных задачах.

Также в контексте настоящего исследования представляется необходимым разграничить понятие «частично открытая задача» со смежными понятиями «дивергентная задача» (Ю. А. Калинова) и «задача на многозначность» (Н. П. Микушева).

В работе Ю. А. Калиновой представлена система геометрических задач дивергентного типа, выступающая средством формирования умений анализировать информацию [65]. Дивергентные задачи трактуются ею как задачи, решение которых сопровождается расхождением направлений мыслительной деятельности. Ю. А. Калинова выделяет четыре направления, по которым анализируется текст задачи. На основе анализа текста можно заключить, что дивергентные задачи представляют собой более широкое понятие. Оно включает закрытые задачи, открытые задачи и частично открытые задачи.

Н. П. Микушева ввела понятие задач «на многозначность» как средства развития рефлексии, выделив шесть типов в зависимости от компонента структуры задачи, обладающего многозначностью [104]. В её работе понятие «частично открытая задача» не используется. Вместе с тем описанные ею задачи «на многозначность» создают ситуацию выбора, запускающую рефлексивные процессы, и по своим характеристикам соотносятся с типами I, II и III предложенной типизации. Как отмечает автор, «система задач "на многозначность" должна содержать следующие основные типы задач: 1) задачи на многозначность ответа, обоснование которого требует применения одного теоретического факта; 2) задачи, которые предполагают многозначность способов решения; 3) задачи, в которых многозначность условия задана явно; 4) задачи, в которых многозначность условия задана неявно; 5) задачи на многозначность требования; 6) задачи "на представительство"» [104]. При этом системообразующим элементом этой системы выступает «проявление многозначности по отношению к структуре задачи» [104]. В настоящем исследовании понятие частично открытой задачи трактуется более широко и включает также задачи с недостаточностью или

избыточностью данных, наличием параметра и необходимостью проверки существования фигуры.

Использование частично открытых задач на стереометрическом материале в классах с углублённым изучением математики мы считаем наиболее продуктивным, в связи со спецификой пространственного содержания геометрии, особыми образовательными потребностями и возможностями учащихся таких классов, а также необходимостью восполнить существующий научный пробел.

Первая группа факторов связана со спецификой стереометрического содержания, то есть с необходимостью оперировать пространственными образами, что допускает многовариантность взаимного расположения фигур: пересечение, параллельность, скрещивание. Учащемуся приходится достраивать чертёж и мысленно перестраивать конфигурацию. Это создаёт естественную зону неопределённости. Одна и та же словесная формулировка может допускать несколько различных чертежей, а значит, разных способов решения и ответов.

Вторая группа факторов обусловлена спецификой классов с углублённым изучением математики, так как от учащихся требуется не только владение предметными знаниями, но готовность работать в условиях неполноты данных. Учащийся должен самостоятельно выделять неизвестные компоненты условия и выдвигать предположения о возможных направлениях поиска, анализировать несколько вариантов развития сюжета задачи. И наконец, он обоснованно выбирает среди них наиболее перспективный. Кроме того, необходимы развитое пространственное мышление, способность к содержательной интерпретации полученных результатов и потребность в проверке корректности своих построений. Частично открытые задачи дают естественную мотивацию для проявления и развития перечисленных качеств. Приведём короткий пример. Учащимся предлагается задача: «В прямоугольном параллелепипеде проведена плоскость, пересекающая ребро AB в точке M и ребро A_1D_1 в точке N . Определите возможные положения этой

плоскости относительно ребра A_1B_1 ». Начиная решать эту задачи одни школьники сразу делают рисунок и перебирают случаи расположения плоскости, а другие вводят координаты и записывают уравнение плоскости. Некоторые сразу замечают, что две точки не задают плоскость однозначно, и переходят к обсуждению ограничений. Именно эти разные пути рассуждений дают возможность для коллективного обсуждения.

Это направление недостаточно разработано и в методике обучения стереометрии. В литературе (Ю. А. Калинова, Н. П. Микушева, П. М. Горев, В. В. Утёмов и др.) имеется значительное число публикаций об открытых, дивергентных и других видах задач, однако системного исследования частично открытых задач как средства организации обучения стереометрии до сих пор не проводилось. Настоящая работа восполняет этот пробел.

Как уже было сказано частично открытая задача может использоваться как запускной механизм для организации несократического диалога. В ней есть неопределенность с обсуждения, которой и можно начинать диалог. Возможны такие вопросы учителя: «Что в условии определено? Какой информации не хватает? В чём проблема?». Многовариантность путей решения дает поле для формулирования гипотез и сравнения: почему результаты расходятся, какой путь рациональнее. Более того, частично открытая задача не сводится к известному алгоритму и готового единственного ответа у неё нет.

Именно поэтому при обучении стереометрии в классах с углублённым изучением математики такие задачи создают основу для учебно-исследовательской деятельности. Их систематическое использование в рамках несократического диалога развивает самостоятельность, критичность мышления и умение аргументировать свою позицию. Предложенная типизация и этапность работы с использованием несократического диалога с такими задачами составляют методическую основу для их внедрения в практику обучения.

Итак, в данном параграфе:

1. На основе анализа теоретических подходов к классификации учебных задач установлено, что в научно-методической литературе, где упоминается понятие «частично открытая задача» (работы П. М. Горева, В. В. Утёмова), отсутствует его чёткое определение: авторы описывают такие задачи через примеры и место в учебном процессе, не вводя критериев отнесения задачи к данному виду.

2. В настоящем исследовании уточняется понятие частично открытой задачей, то есть такой математической задачи, в которой элемент неопределённости, проявляющийся как недостаточность или избыточность данных, неоднозначность формулировки, наличие параметра, множественность ответов или способов решения, присутствует не во всех, а лишь в отдельных компонентах её структуры, то есть в условии, заключении, решении или базисе. Указанные проявления локализуются в условии, заключении, решении или базисе задачи, что позволяет отличать частично открытые задачи от закрытых, где все компоненты определены, и от открытых, где неопределённость затрагивает все компоненты.

3. Предложена типизация частично открытых задач основание которой выступает характер учебного действия, выполняемого учащимся при работе с неопределённостью. Выделены пять типов: многозначность ответа (I), многозначность метода решения (II), явная многозначность условия (III), неявная некорректность условия (IV), неопределённость требования (V). Каждый тип проиллюстрирован задачей на стереометрическом материале.

4. Проведено разграничение понятия «частично открытая задача» со смежными понятиями «дивергентная задача» и задач «на многозначность». Выявлено, что дивергентные задачи представляет собой более широкий класс и охватывает также закрытые и открытые задачи. А задачи «на многозначность» соотносятся с предложенной типизацией и могут быть отнесены к типам I, II и III.

5. В связи со спецификой стереометрического содержания, которое создаёт естественную зону неопределённости: многовариантность взаимного

расположения фигур, необходимость достраивать чертёж и мысленно перестраивать конфигурацию и особенностями учащихся классов с углублённым изучением математики, обоснована целесообразность использования частично открытых задач на стереометрическом содержании в классах с углублённым изучением математики

6. Установлено, что частично открытая задача является естественным запускным механизмом несократического диалога в связи со свои особенностями: наличие элемента неопределённости в структуре задачи, многовариантность способов решения или ответов, продуктивный характер деятельности по решению, требующий конструирования нового способа действия.

ВЫВОД ПО I ГЛАВЕ

В первой главе проведён теоретический анализ философской, психолого-педагогической и методической литературы. Он позволил уточнить ключевые понятия исследования: «неосократический диалог», «частично-открытая задача», «учебно-исследовательская деятельность».

Сначала прослежена эволюция понятия «сократический диалог» от античного диалога Сократа через педагогическую интерпретацию Л. Нельсона и методическую адаптацию Г. Хекмана к современным образовательным практикам М. Липмана и других исследователей. Отмечено, что единой общепринятой формулировки неосократического диалога в литературе нет. Разные авторы описывают его через набор признаков: групповой полилог, регрессивную абстракцию, консенсус, сдержанность фасилитатора. Поэтому в настоящем исследовании неосократический диалог понимается как вид учебного диалога, в котором учитель занимает позицию сдержанного фасилитатора и организует сопоставление суждений, выдвигаемых самими учащимися. Все взаимодействие строится с помощью вопросов учителя, который таким образом приводит учащихся к противоречию между выдвинутыми суждениями. Результатом такого обсуждения становится обобщённое знание.

Использование неосократического на стереометрическом содержании обладает своей спецификой. Он также начинается с неоднозначного вопроса, но который продиктован самой задачей, имеющей в своём условии неопределенность. Ученик сам разбирается с полученной геометрической ситуацией, выдвигает гипотезу и проверяет её, сталкиваясь с расхождением между чертежом и логикой. Так как гипотез верных может получиться несколько, то это в итоге может привести к обобщенному знанию. Опорная стереометрическая конструкция помогает учащимся на одном чертеже изобразить все те связи между полученными фактами, которые удалось осознать.

Чтобы отделить неосократический диалог от других видов диалогового взаимодействия, мы обратились к классификации методов обучения, созданной И. Я. Лернером. Соотнесение показало, что проблемный диалог соответствует методу проблемного изложения. Эвристический диалог – ведущий вид взаимодействия в рамках частично-поискового метода. Если рассматривать неосократический диалог как частный случай эвристического, он также укладывается в рамки частично-поискового метода. Более того, опираясь на четырёхуровневую модель исследовательского обучения Х. Банча и Б. Белла, мы определили, что неосократический диалог применим и на уровнях структурированного и направляемого исследования. Это позволяет использовать его также и при исследовательском методе обучения.

Поскольку неосократический диалог может использоваться как инструмент реализации исследовательского метода обучения, тогда необходимо обратиться к содержанию понятия «учебно-исследовательская деятельность». В трактовке И. В. Клещевой под учебно-исследовательской деятельностью будем понимать познавательную активность, которую побуждает собственный интерес учащегося и направляет осознанная цель. В неё входят сбор и упорядочение данных, выдвижение предположения, его проверка и оформление итогового вывода. В ходе такой деятельности учащийся приобретает учебно-исследовательские умения.

На стереометрическом материале исследовательские умения приобретают ряд особенностей. Ученик должен поставить исследовательский вопрос о свойствах пространственной конфигурации, выдвинуть и проверить предположение о связях между её элементами, мысленно преобразовать чертёж, построить пространственную модель и выбрать метод решения. Отдельно стоит умение анализировать ошибки переноса планиметрических представлений, оценивать стратегию и обобщать результат.

Эти умения, естественно, формируются в процессе использования неосократического диалога. Учитель ставит неоднозначный вопрос и этим

провоцирует выдвижение гипотез, затем организует их проверку, чтобы привести к противоречию. На этом этапе школьники учатся задавать содержательный математический вопрос, критически оценивать разную информацию и отстаивать собственную точку зрения. На заключительном этапе анализ ошибок и подведение итогов формируют умение оценивать стратегию и обобщать результат.

Чтобы несократический диалог начался, нужен неоднозначный вопрос. В математике такой вопрос естественно вытекает из самой задачи, поэтому потребовалось уточнить содержание понятия «частично открытая задача». В работах П. М. Горева и В. В. Утёмова это понятие упоминается, но чёткого определения нет: авторы описывают такие задачи через примеры и не вводят критериев отнесения. Поэтому в настоящем исследовании уточнено понятие частично открытой задачи и под такой задачей понимается математическая задача, в которой элемент неопределённости присутствует не во всех, а лишь в отдельных компонентах структуры: условии, заключении, решении или базисе. Это позволяет отличать частично открытые задачи от закрытых и открытых. На этом же основании мы типизируем их по характеру учебного действия и выделяем пять типов: многозначность ответа, многозначность метода решения, явная многозначность условия, неявная некорректность условия, неопределённость требования. Каждый тип проиллюстрирован стереометрическим примером.

Мы также разграничили понятие «частично открытая задача» со смежными. У Ю. А. Калиновой дивергентная задача – более широкое понятие. Задачи «на многозначность», описанные Н. П. Микушевой, соотносятся с типами I, II и III нашей типизации. Частично открытую задачу мы понимаем шире: к ней относятся задачи с недостатком или избытком данных, с параметром, а также задачи, где нужно проверить, существует ли заданная фигура. Частично открытая задача инициирует несократический диалог, так как в структуре ее условия есть элемент неопределённости, ее способы решения или ответы могут быть разными, а значит может возникнуть

множественность гипотез и, наконец, она требует исследовательской продуктивной деятельности, так как готового алгоритма здесь нет, ученику приходится самому придумывать, включая творчество. Именно поэтому частично открытая задача и запускает коллективное учебное исследование в форме неосократического диалога.

Таким образом, теоретические результаты первой главы создают основу для разработки методики использования неосократического диалога при обучении стереометрии в классах с углублённым изучением математики.

Глава II. МЕТОДИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НЕОСОКРАТИЧЕСКОГО ДИАЛОГА ПРИ ОБУЧЕНИИ СТЕРЕОМЕТРИИ УЧАЩИХСЯ КЛАССОВ С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ МАТЕМАТИКИ

Вторая глава посвящена описанию методики, позволяющей использовать неосократический диалог при углублённом изучении стереометрии в школе, включающая набор методического обеспечения (схему ведения неосократического диалога, наборы разных типов частично открытых стереометрических задач по всем темам школьного курса стереометрии, фрагменты неосократических диалогов) и способы его использования на уроках. На основе теоретических результатов первой главы разработаны следующие компоненты методики: этапы ведения неосократического диалога, включающие пять последовательных шагов (постановка задачи, выявление неопределённости, выдвижение гипотез, проверка гипотез, вывод) и соответствующие типы вопросов (уточняющий, направляющий, гипотетический, критический, обобщающий); наборы частично открытых стереометрических задач по теме «Углы в пространстве» с учётом предложенной типизации; фрагменты неосократических диалогов, построенные на материале этих задач. Заключительный параграф главы посвящён описанию педагогического эксперимента (констатирующий, поисковый и формирующий этапы), нацеленного на проверку гипотезы исследования и эффективности разработанной методики, подтверждённой статистическим анализом полученных данных.

§5. Отбор типов частично открытых задач для использования несократического диалога при обучении стереометрии учащихся классов с углублённым изучением математики

Для решения задач настоящего исследования мы обратились к учебникам геометрии для 10-11 классов углублённого уровня. В федеральный перечень входят, в частности, учебники авторского коллектива под редакцией Л. С. Атанасяна и др. [14] и А. Г. Мерзляка и др. [100]. Их задачный материал и стал предметом анализа. Цель анализа состояла в выявлении различных типов частично открытых задач в заданном материале данных учебников. К анализу также были привлечены учебники А. Д. Александрова и др. [3] и Е. В. Потоскуева и др. [132]. Они не входят в актуальный федеральный перечень учебников, однако продолжают использоваться в качестве дополнительной литературы при обучении учащихся в классах с углублённым изучением математики.

Анализ показал, что в учебниках Л. С. Атанасяна и др. и А. Г. Мерзляка и др. преобладают закрытые задачи с полностью определённым условием, однозначным требованием и, как правило, единственным способом решения.

Так, например, задача 256 из учебника Л. С. Атанасяна: «В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна m , а плоский угол при вершине равен α . Найдите: а) высоту пирамиды; б) боковое ребро пирамиды; в) угол между боковой гранью и плоскостью основания; г) двугранный угол при боковом ребре пирамиды» [14], является типичным образцом закрытой задачи. Условие и требование здесь полностью определены. Наличие буквенных параметров само по себе не предполагает открытости, поскольку ответы выражаются через заданные величины, а само задание не предполагает анализа зависимости или исследования границ существования (например, области допустимых значений α). Стоит отметить, что даже задачи повышенной сложности в этих учебниках, как правило, осложнены технически или конструктивно, но сохраняют закрытую структуру.

Следует отметить, что в учебнике Л. С. Атанасяна и др. присутствует специальная рубрика «Исследовательские задачи». В ней представлены задачи, посвящённые свойствам ортоцентрического, равногранного и каркасного тетраэдров. Данные задачи требуют от учащихся не столько получения числового или аналитического ответа, сколько выявления и доказательства совокупности взаимосвязанных свойств объектов, а также установления логических связей между различными условиями и утверждениями. Например, в задаче 1 (об ортоцентрическом тетраэдре) формулировка «Докажите, что тетраэдр является ортоцентрическим тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий...» [14] предполагает множественность подходов к доказательству (тип II) и анализ равносильности утверждений, что создаёт пространство для выдвижения гипотез и их проверки.

Вместе с тем отметим, что указанные исследовательские задачи представлены в учебнике без соотнесения с конкретными темами курса стереометрии и не охватывают весь объём учебного материала. Это затрудняет их систематическое использование в регулярном учебном процессе для поэтапного формирования учебно-исследовательских умений учащихся.

В то же время в учебнике авторского коллектива под редакцией А. Г. Мерзляка и др. встречаются отдельные примеры задач, которые могут быть отнесены к частично открытым. В частности, задача 3.30: «Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Отметьте на его рёбрах три точки так, чтобы сечение куба плоскостью, проходящей через эти точки, было пятиугольником» [103], в соответствии с типизацией, предложенной в параграфе 4, может быть отнесена к типу III. В данной задаче не указано, какие именно рёбра и где именно следует выбрать точки, что порождает множество возможных решений и стимулирует выдвижение гипотез. Однако такие задачи встречаются в учебнике несистематически и, как правило, вынесены в рубрики повышенной сложности, что может также ограничивать их включение в регулярный учебный процесс.

Более системно частично открытые задачи представлены в учебнике А. Д. Александрова и др. Задачный материал здесь структурирован по уровням сложности, а рубрика «Исследуем» содержит вопросы, предполагающие неоднозначность ответа («Может ли...?», «Верно ли...?», «Какой вид...?»). Например, задачи с требованием найти границы изменения величины (тип I) или определить возможные конфигурации геометрических объектов (тип IV) создают условия для учебно-исследовательской деятельности. Это позволяет рассматривать данные учебники как ценный источник для формирования набора частично открытых стереометрических задач.

Отдельного внимания заслуживает задачник Е. В. Потоскуева и Л. И. Звавича, который отличается значительным разнообразием задачного материала и содержит задачи, многие из которых могут быть отнесены к частично открытым. Так, представлены задачи с параметрическим условием (тип III), например задача 3.026: «В правильном тетраэдре $PABC$ с ребром 6 через центр O основания ABC проведена плоскость α , параллельная BC и пересекающая ребро AP в некоторой точке K . Постройте сечение тетраэдра плоскостью α . Укажите границы изменения периметра и площади этого сечения при всевозможных положениях точки K на ребре AP » [136]. В этой задаче положение точки K (а следовательно, и параметры сечения) может варьироваться, что требует от учащихся исследования функциональных зависимостей и определения границ изменения величин, что соответствует характеристике частично открытой задачи типа III.

Другим примером может служить задача 4.091: «В кубе с ребром 10 проведено сечение плоскостью, пересекающей четыре параллельных ребра и образующей с каждым из них угол в 45° . Определите площадь сечения. Все ли такие сечения равны или только равновелики?» [136]. Здесь условие задаёт не единственное сечение, а множество возможных сечений, удовлетворяющих указанным условиям, что побуждает к сравнению и анализу. Такую задачу можно отнести также к III типу.

Значительный интерес представляют задачи, требующие анализа существования или корректности условия (тип IV). Например, задача 4.036: «Точка A лежит внутри двугранного угла и удалена от его граней на расстояния, равные 1 и 22, а от ребра двугранного угла на расстояние, равное 2. Найдите величину двугранного угла» [136]. Задача требует от учащегося не только вычислений, но и анализа возможности существования такой конфигурации.

Ещё более явно признаки частично открытой задачи проявляются в задачах, где требуется определить, возможна ли та или иная ситуация. Например, задача 3.109: «Можно ли параллелограмм $ABCD$ так перегнуть по диагонали AC , чтобы проекцией треугольника ABC на плоскость ADC был треугольник ADC ?» [136] содержит в условии неопределённость, требующую исследования. Задачи 4.091–4.092 на нахождение площади сечения с указанием, что «не все ли такие сечения равны или только равновелики», также побуждают к сравнению и анализу.

Ряд задач содержит исследовательские вопросы, например: «Определите вид треугольника DEF » (задача 1.053), «Какая фигура получилась в сечении?» (1.033), «Определите вид фигуры, вершинами которой служат эти точки» (2.010). В задаче 4.055 требуется не только найти величину угла, но и определить взаимное расположение плоскостей («заполните таблицу»), что предполагает анализ различных случаев.

Проведённый анализ позволяет заключить, что в современных учебниках, соответствующих ФГОС СОО, а также в дополнительных задачниках частично открытые задачи типов I–IV встречаются, но не представлены в виде системы: они рассредоточены по темам и уровням сложности, их типология не является предметом специального конструирования, а методическое сопровождение отсутствует. Это обуславливает необходимость разработки собственного подхода к отбору и конструированию задачного материала, ориентированного на развитие учебно-исследовательских умений учащихся классов с углублённым изучением математики.

На основе предложенной в §4 типизации нами были выделены те типы частично открытых задач, которые наиболее соответствуют структуре и целям использования несократического диалога:

Тип III (явная многозначность условия) – задачи, в которых условие содержит свободный элемент, изменение которого приводит к изменению результата. Такие задачи побуждают учащихся исследовать зависимость характеристик объекта от параметра, формулировать гипотезы о характере этой зависимости.

Тип IV (неявная некорректность условия, анализ существования) – задачи, содержащие избыточные или противоречивые данные, либо требующие проверки возможности существования описанной конструкции. Диалогический потенциал этих задач состоит в необходимости анализа корректности условия и обоснования условий существования.

Тип V (неопределённость требования) – задачи, в которых требование сформулировано в общей форме, недостаточно определено (например, «исследуйте», «сформулируйте вопросы»).

Выбор именно этих типов обусловлен тем, что они активизируют ключевые учебно-исследовательские умения: анализ и выделение недостающих элементов, порождение гипотез о возможных вариантах, проверку на непротиворечивость на этапе анализа условия задачи. Типы I и II (многозначность ответа или метода решения), напротив, локализуют неопределённость на завершающих этапах и в большей степени стимулируют перебор вариантов, чем выдвижение новых гипотез.

Проиллюстрируем выделенные типы примерами.

Пример 1 (тип III). В кубе каждое ребро равно 3. Рассмотрите сечение, проходящее через вершины A и B и пересекающее ребро CC_1 в точке X (между C и C_1). Исследуйте, как зависят площадь и периметр сечения от положения точки X .

Обоснование отнесения к типу III: условие содержит свободный параметр – положение точки X , которое может изменяться. От учащихся

требуется установить функциональную зависимость геометрических характеристик сечения от этого параметра, что предполагает выдвижение гипотез о виде этой зависимости (линейная, квадратичная, монотонная и т.п.).

Организация несократического диалога: учитель инициирует обсуждение вопросом, который побуждает учащихся самостоятельно обнаружить неопределённость, заложенную в условии: «Как выглядит сечение ABX ?» Учащиеся выдвигают гипотезы и обнаруживают, что у всех они разные.

Основные гипотезы представляются рисунками на доске, а затем проверяются. Диалог направляется на выявление противоречий в предположениях и на обобщение полученных результатов.

Пример 2 (тип IV). Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$. Боковое ребро SA образует с плоскостью основания угол 60° . Через ребро SA проведены две различные плоскости, образующие с плоскостью основания равные углы. Определите эти углы.

Обоснование отнесения к типу IV: задача требует анализа существования конструкции. Неопределённость скрыта в условии: требуется установить, возможна ли описанная ситуация, и если да, то определить количество решений.

Организация несократического диалога: учитель ставит неоднозначный вопрос, заложенный задачей – «как выглядят плоскости? Нарисуйте». В контексте данной задачи ответ на этот вопрос неоднозначен и опять спровоцирует множественность гипотез.

Обсуждение приводит к пониманию, что множество таких плоскостей описывается вращением вокруг ребра, а угол с основанием может варьироваться. Равенство углов для двух различных плоскостей означает симметрию относительно плоскости, перпендикулярной основанию, что возможно. Далее диалог направляется на выяснение количества таких пар.

Пример 3 (тип V). В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена плоскость, пересекающая ребро AB в точке M и ребро $A_1 D_1$ в точке N . Сформулируйте различные вопросы, которые можно задать для

исследования получающихся сечений в зависимости от положения точек M и N .

Обоснование отнесения к типу V: требование в задаче не сформулировано в явной форме; учащимся предлагается самостоятельно определить направление исследования. Это активизирует этап целеполагания в исследовательской деятельности.

Организация неосократического диалога. Диалог начинается с вопроса учителя, на который нет однозначного ответа: «Какие геометрические характеристики этого сечения могут быть нам интересны/важны?» Учащиеся могут предложить подумать над формой сечения, периметром, площадью, углами наклона к граням и др. Скорее всего эти варианты различаются по степени сложности решения, поэтому учитель может либо принять все и разделить учащихся на группы, предложив им посильные задачи, а может выбрать одну, наиболее подходящую гипотезу под цель урока и начать с ней работать фронтально с классом. Ценность такой ситуации заключается в множественности гипотез, которые могут придумать учащиеся. Роль учителя заключается в организации этого процесса с помощью вопросов, которые не содержат скрытых подсказок. Если рассматривались многие гипотезы, то в конце можно послушать каждую группу, чтобы понять сколько всего можно узнать об одном сечении, проанализировать его параметры, тем самым прийти к обобщению.

Мы создали набор частично открытых задач по всем темам школьного курса стереометрии, в который вошли задачи III-V типов. Он учитывает особенности пространственного развития современных учащихся.

Задачи распределены по темам: параллельность, перпендикулярность, расстояния в пространстве.

Современные психолого-педагогические исследования фиксируют устойчивую тенденцию к снижению уровня развития пространственного мышления у школьников. Как отмечают В. А. Гусев [43], И. С. Якиманская [200] и др., одной из ключевых причин является

доминирование «экранной» культуры и клипового восприятия информации, при котором у учащихся снижается способность к мысленному оперированию объемными образами и их преобразованию. Статистика ЕГЭ по математике профильного уровня подтверждает данную тенденцию [203], так как результаты задания по стереометрии второй части (№ 14) традиционно являются одними из самых низких по процентному выполнению среди всех заданий второй части. Это свидетельствует о том, что даже в классах с углубленным изучением математики значительная часть учащихся не имеет сформированного в достаточной мере пространственного мышления, необходимого для успешной учебно-исследовательской деятельности.

Данное обстоятельство обусловило необходимость специального конструирования задачного материала в рамках разработанной методики. При создании частично открытых стереометрических задач мы исходили из принципа доступности входа: начальные конструкции должны быть наглядно очевидны. В то же время система задач обеспечивает поступательное развитие пространственного мышления через последовательное усложнение геометрических конструкций (см. Приложение 1).

Итак, мы разработали шесть частично открытых задач разных типов (III- V) по основным темам курса стереометрии: параллельность, перпендикулярность, расстояния. Каждую задачу мы сопровождали методическим комментарием, который помогает организовать несократический диалог. Заметим, что каждая задача связана с предыдущей идеями решения и знаниями, которые можно использовать в последующей, что обуславливает связь приведенного набор задач и позволяет встраивать их в обучение системно. Геометрические фигуры выбраны в задачах также с учетом сниженного пространственного представления учащихся. Поэтому сначала простейшие многогранники: правильный тетраэдр и куб. Выбор этих фигур обусловлен их симметричностью и привычностью для учащихся. Такой подбор снижает нагрузку на этапе осознания неопределённости условия. Даже при недостаточно сформированных пространственных представлениях

учащийся способен мысленно удержать образ фигуры и предложить первую гипотезу о возможном расположении элементов. Второй уровень мы обозначаем как основной, или этап развития. Здесь собраны задачи с более сложными конфигурациями: правильная четырёхугольная и шестиугольная пирамиды, треугольная и шестиугольная призмы. Переход от треугольной пирамиды к четырёхугольной, а затем к шестиугольной создаёт условия для осознанного обобщения и установления аналогий. Учащийся не просто применяет отработанный приём. Он должен мысленно реконструировать конструкцию в новой, более сложной ситуации. Третий уровень мы называем продвинутым, или этапом обобщения. В задачах этого уровня неопределённость локализована не на поверхности тела, а внутри него. Либо она требует рассмотрения сечений, которые пересекают внутренние элементы фигуры. Это то принципиально меняет характер работы с чертежом: учащийся не может опереться на видимые ребра или грани, ему необходимо мысленно «проникать» внутрь многогранника, достраивая невидимые линии и точки пересечения. Задачи такого типа максимально активизируют все компоненты пространственного мышления – от мысленного вращения до оперирования образами, что напрямую соответствует требованиям углубленного уровня изучения математики.

Предложенная уровневая дифференциация создаёт условия для включения в несократический диалог учащихся с различным исходным уровнем пространственного мышления. Учащиеся с недостаточной сформированностью пространственного мышления на начальном этапе получают возможность «войти» в диалог на доступных конструкциях, почувствовать успех и приобрести необходимый начальный опыт.

Итак, в параграфе решены следующие задачи:

1. Проведён анализ задачного материала учебников по стереометрии для углублённого уровня (Л. С. Атанасян и др., А. Г. Мерзляк и др., А. Д. Александров и др., Е. В. Потоскуев и др.). Установлено, что частично открытые задачи в них присутствуют в различном количестве, но не образуют

целостной системы: они рассредоточены по темам, вынесены в рубрики повышенной сложности или носят эпизодический характер, что затрудняет их систематическое использование для формирования учебно-исследовательских умений.

2. Опираясь на типизацию из §4, мы отобрали три типа частично открытых задач, которые лучше всего подходят для несократического диалога. Это тип III (явная многозначность условия), тип IV (неявная некорректность условия, анализ существования) и тип V (неопределённость требования). Каждый из них запускает свои учебно-исследовательские умения. Тип III побуждает выдвигать гипотезы. Тип IV требует проверить корректность условия. Тип V ставит учащегося перед необходимостью самому сформулировать цель.

3. Каждый тип проиллюстрирован примерами. Они показывают, как несократический диалог переводит внешнюю неопределённость задачи во внутренний план учебного исследования. Сначала учащиеся порождают гипотезы, затем проверяют их и в итоге выходят к обобщению.

4. Мы создали набор частично открытых задач типов III–V. Он охватывает все темы стереометрии. При его создании мы учитывали снижение уровня пространственного мышления у современных школьников, поэтому в наборе действует принцип доступного входа и постепенного усложнения конструкций.

5. Набор структурирован по трём уровням сложности. Начальный уровень составляют задачи с кубом и тетраэдром. Основной уровень включает правильные четырёхугольные и шестиугольные пирамиды и призмы. Продвинутый уровень образуют задачи с внутренними сечениями. Уровневая дифференциация обеспечивает доступный «вход» в диалог для учащихся с разным уровнем пространственного мышления и использует процесс решения задач как средство его целенаправленного развития.

**§6. Основные положения методики использования
неосократического диалога при обучении стереометрии учащихся
классов с углубленным изучением математики**

В соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования, в типологии уроков выделяется тип урока общеметодологической направленности. Он ориентирован на формирование у обучающихся способности к систематизации и обобщению изучаемого материала, на построение целостной системы знаний в рамках конкретной темы или раздела. Целью урока общеметодологической направленности, согласно нормативным документам, является выстраивание связей между уже освоенными элементами содержания, выявление общих закономерностей и принципов, лежащих в основе изученного материала, а также формирование у учащихся умения переносить освоенные способы действия на новые, в том числе нетипичные, ситуации. Такой урок предполагает активную рефлексивную деятельность учащихся, направленную на осмысление структуры освоенного знания и способов его получения.

Ключевым этапом урока общеметодологической направленности, на котором в наибольшей степени реализуется его содержательная цель, является этап систематизации и обобщения знаний.

Его цель заключается в том, чтобы создать учебную ситуацию, во время которой произойдет переход от отдельных, уже освоенных элементов знания к их упорядоченной структуре. Если этот этап организован грамотно, то у учащихся формируется умение строить обобщённые модели, которые в свёрнутом виде отражают суть изученного материала на последних уроках.

На уроках стереометрии этот урок должен проходить так, чтобы случилась систематизация знаний на пространственных фигурах, а не просто запоминание отдельных теорем и фактов. Тогда становится необходимо направлять учебную деятельность на выявление свойств объектов, их сопоставление и проведение аналогий между разными телами. В связи с этим

к числу целей этапа относятся: выстраивание целостной системы геометрических фактов, теорем и методов, относящихся к изучаемым пространственным фигурам (многогранникам, телам вращения, их сечениям, взаимному расположению прямых и плоскостей), формирование умения выделять опорные конструкции.

Особого внимания заслуживает технология варьирования, которая на этапе систематизации и обобщения заключается в намеренном изменении параметров условия или заключения задачи с целью выявления инвариантных свойств и общих закономерностей. На заключительном этапе работы с задачей технология варьирования опорной конструкции порождает исследование задачи, так как, например, изменение параметров в условии задачи позволяет выйти за пределы рассмотренного частного случая, обнаружить, какие свойства сохраняются, а какие изменяются, и тем самым перейти от единичного решения к обобщению, охватывающему целый класс ситуаций.

Кроме того, технология варьирования создаёт естественные ситуации для выдвижения и проверки гипотез, что делает её инструментом, целесообразным для использования несократического диалога, который организует коллективное обсуждение выдвигаемых гипотез, их проверку и формулирование обобщающих выводов.

Работа на заключительном этапе решения частично открытой задачи строится через варьирование полученной опорной конструкции, которое мы предлагаем организовывать с помощью несократического диалога.

Опишем, как он работает на этапах анализа условия и заключения. Мы выделяем пять шагов: постановка задачи, выявление неопределённости, выдвижение гипотез, проверка гипотез, вывод, в соответствии с целью организовать учебно-исследовательскую деятельность на уроке. Каждому шагу соответствует свой тип вопроса: уточняющий, направляющий, гипотетический, критический, обобщающий, примеры которых можно видеть в таблице 3. При этом не обязательно вопросы уточняющего типа могут быть заданы только на первом шаге.

При обучении стереометрии шаги приобретают свою специфику, связанную с работой с пространственными объектами. Так, постановка задачи опирается на пространственную конфигурацию, которую задаёт частично открытая задача, в которой неопределённость может быть связана с многовариантностью взаимного расположения элементов. Например, в задаче о сечении куба секущая плоскость может проходить через разные рёбра, и каждый случай даёт свою конфигурацию. Шаг с выдвижением гипотез требует умения мысленно оперировать пространственными образами и не бояться высказывать свои предположения. Выход к противоречию может быть обусловлен сопоставлением чертежа с его логическим обоснованием. И, наконец, вывод фиксируется в виде опорной стереометрической конструкции, иллюстрирующей обобщающее знание, связанное с представленным пространственным телом в задаче.

Таблица 3 – Типология вопросов с примерами

Тип вопроса	Примеры	Функция
Уточняющие	«Что известно о взаимном расположении элементов?», «Какая пространственная конфигурация задана?», «Что требуется найти или доказать?»	Понимание условия, фиксация данных, обнаружение неопределённости в пространственной ситуации
Направляющие	«Какие элементы фигуры связаны?», «Какой факт о параллельности или перпендикулярности применим?», «Какая теорема работает в этой конструкции?»	Выбор стратегии, планирование, опора на свойства пространственных фигур
Гипотетические	«А если плоскостьйдёт иначе?», «Может ли прямая быть скрещивающейся?», «Что изменится при другом расположении точки?»	Выдвижение гипотез о свойствах пространственной конструкции
Критические	«Где противоречие между чертежом и рассуждением?», «Почему этот случай невозможен в пространстве?», «Всегда ли сохраняется это свойство?»	Проверка гипотез, поиск противоречий, сопоставление наглядного образа с аксиомами и теоремами
Обобщающие	«Что изменится при варьировании положения плоскости?», «Как сформулировать общий признак?», «Какая опорная конструкция фиксирует найденные связи?»	Обобщение, оформление вывода через опорную стереометрическую конструкцию

Таблица 4 – Этапы урока стереометрии общеметодологической направленности с использованием неосократического диалога

Этап	Действия учителя	Действия учащихся	Развиваемые умения
Постановка общего неоднозначного вопроса	Формулирует общий неоднозначный вопрос, задает рамку обсуждения, уточняет версии учащихся.	Высказывают предположения, формулируют первичные версии и объясняют их.	Постановка вопросов, выдвижение гипотез, коммуникация.
Уточнение условий и построение модели	Побуждает уточнять условие задачи, вводить обозначения, строить чертеж/модель.	Уточняют данные, строят изображения и модели, выделяют элементы конструкции.	Анализ условий, моделирование, работа с представлениями.
Построение плана исследования	Способствует выбору способов и средств, задает вопросы о возможных направлениях решения, задает гипотетические вопросы	Намечают план рассуждений, выбирают теоремы и приемы, распределяют роли в группе.	Планирование, выбор средств, сотрудничество.
Проверка гипотез	Предлагает проверять гипотезы, задает критические вопросы	Проверяют гипотезы, проводят рассуждения, рассматривают контрпримеры	Критическое мышление, выявление противоречий, исследование.
Фиксация опорной конструкции	Организует фиксацию опорной конструкции, подводит к формулировке вывода и его обоснованию, задает обобщающие вопросы.	Формулируют доказанный результат, фиксируют опорную конструкцию, устанавливают связи с ранее изученным.	Строить доказательство.
Варьирование опорной конструкции (обобщение)	рассматривать случаи, варьировать условие/требование, сопоставлять ответы, задает уточняющие и гипотетические вопросы	Изменяют параметры задачи, проверяют гипотезы, проводят рассуждения.	Критическое мышление, выявление противоречий, обобщение.
Выводы и рефлексия	Задает вопросы о ходе решения, трудностях, альтернативных способах; соотносит результат с целями, задает обобщающие вопросы	Оценивают ход исследования, сравнивают способы решения, формулируют выводы и вопросы.	Рефлексия, оценка, культура обсуждения.

На основе выделенных шагов неосократического диалога, типов вопросов и логики учебного исследования мы определили этапы урока стереометрии общеметодологической направленности (см. таблицу 4).

Приведем пример работы с частично открытой задачей с использованием неосократического диалога.

Задача. В треугольной пирамиде $MABC$ боковые грани MAC и MBC взаимно перпендикулярны и перпендикулярны основанию пирамиды, которым служит равнобедренный треугольник ABC . Через вершину C проведена плоскость перпендикулярная плоскости грани MAB . Найдите периметр и площадь фигуры, получившейся при пересечении пирамиды и плоскости, если $MC=10$ см, $AB=20$ см.

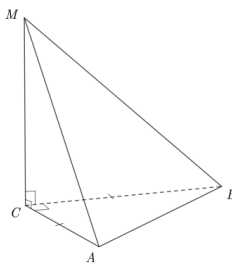


Рисунок 1 – Условие задачи

По принятой классификации это частично открытая задача типа III – «многозначность условия (явная)». Условие не определяет единственную плоскость α : требуется, чтобы она проходила через вершину C и была перпендикулярна плоскости грани MAB . Это и инициирует ситуацию выбора и необходимость перебора возможных случаев. Именно эта явная неопределённость условия делает задачу эффективным средством запуска неосократического диалога.

Таким образом неосократический диалог следует начать с обсуждения положения плоскости, поэтому общий неоднозначный вопрос может быть таким: как расположена плоскость? Это уточняющий вопрос для того, чтобы учащиеся выдвинули гипотезы и обнаружили их многообразие и, как следствие, осознали неоднозначность в условии задачи.

Далее ученики предлагают гипотезы – рисуют на доске все возможные случаи (рис. 2).

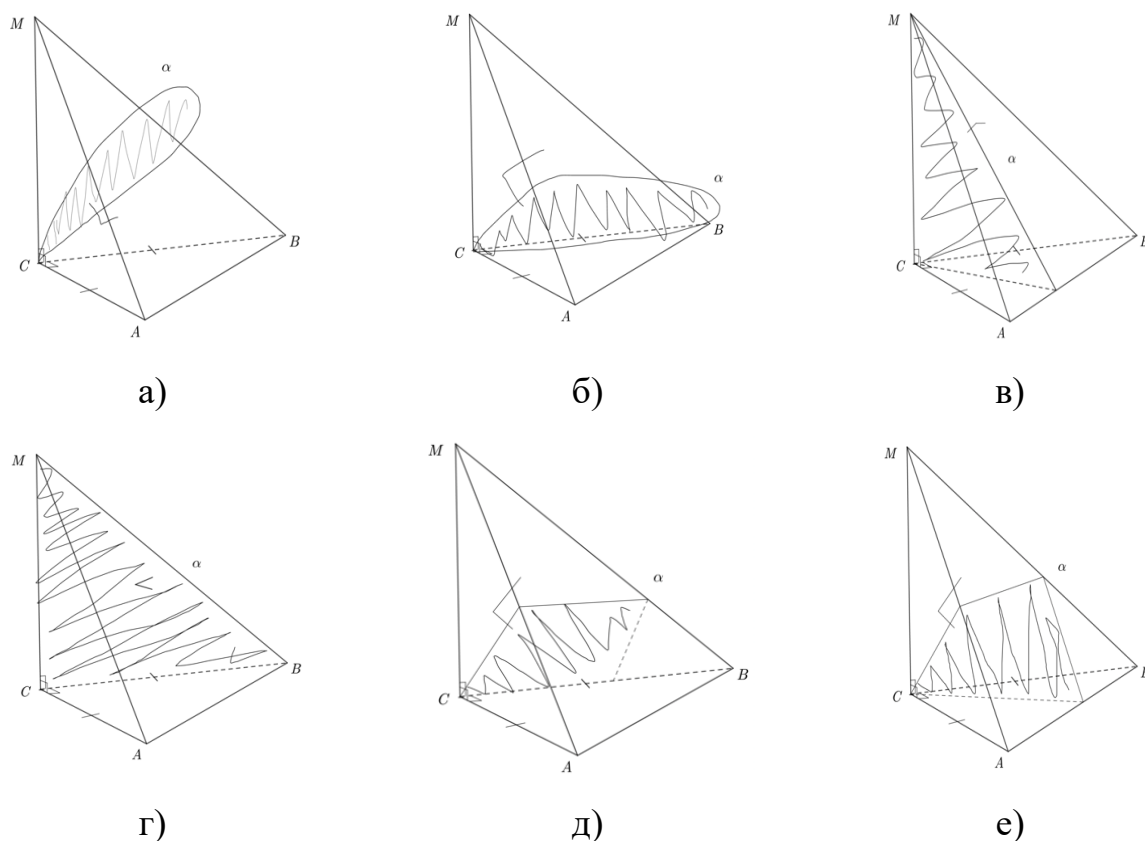


Рисунок 2 – Гипотезы учащихся в эскизах

Этот шаг важен по многим причинам. Во-первых, есть возможность увидеть разные положения плоскости. Во-вторых, дальнейшее обсуждение будет обращено к этим уже готовым чертежам. Важно, чтобы учитель и ученики не использовали оценочных суждений для поддержания доброжелательной обстановки и возможности высказываться без опасений.

Далее может быть осуществлен следующий диалог.

Учитель: хорошо, давайте разбираться с каждым случаем. Рассмотрим рисунок 2 а). Согласно ему, какой фигурой будет являться пересечение плоскости и пирамиды? (учитель взаимодействует в вопрошающей форме)

Учащийся: это треугольник, так как плоскость сечет треугольник ABM по прямой, а значит пересекает какие-то два ребра из трех в грани ABM или проходит через две ее вершины. Таким образом, оставляя точки пересечения в других гранях ACM и CMB , в которых уже есть точка C , принадлежащая

сечению. А значит, соединяя полученные точки в гранях $АСМ$ и $СМВ$, мы получим треугольник в сечении – $СКЕ$. (*аргументация*)

Учитель: принято! А это относится ко всем гипотезам? (*вопрошающее указание на противоречие*)

Учащийся: да, так как в рассуждении не опирались на конкретный случай. Получается, что чертежи д) и е) уже не подходят. (*самостоятельное осознание противоречия*)

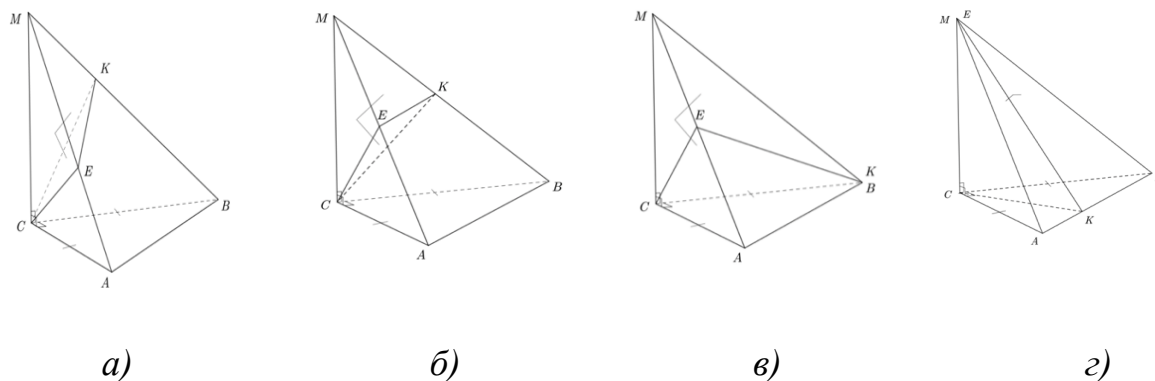


Рисунок 3 – Усовершенствованные гипотезы учащихся

Учитель: так, получается, мы будем работать с треугольником в сечении. Давайте посмотрим внимательно на все наши гипотезы. Как вы думаете, что их объединяет? (рис 3.). (*Учитель подытоживает диалог, чтобы удержать внимание на фокусе проблемы*).

Ученик: они все содержат перпендикуляр, опущенный из C на плоскость $АМВ$.

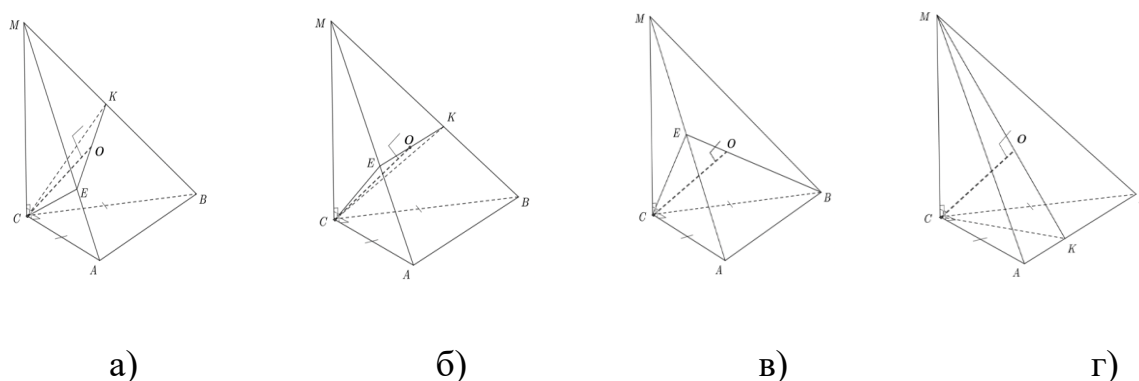


Рисунок 4 – Усовершенствованные гипотезы учащихся

Учитель: хорошо, тогда если мы соберем эти конструкции в одной фигуре, что мы получим?

Ученик: мы получим множество плоскостей, проходящих через перпендикуляр к другой плоскости.

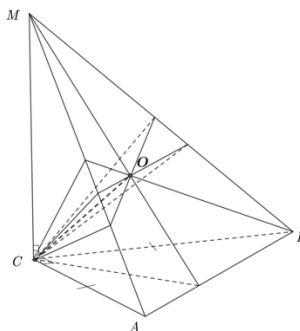


Рисунок 5 – Опорная конструкция

Учитель: так, хорошо, давайте теперь решим задачу. Нас просили найти площадь и периметр. (*направление мысли*)

Далее остается классу разделиться на группы и решить задачу для каждой приведенной гипотезы, а затем сравнить ответы.

Учитель заранее знает, что некоторые случаи более сложно решаются, чем другие, в соответствии с чем он может дифференцировать класс.

Подробное решение задачи приведено в Приложении.

После решения задачи происходит работа на заключительном этапе работы с задачей в технологии варьирования для обобщения.

Возможен следующий диалог.

Учитель: а что, если в условии взять не такую треугольную пирамиду, а правильный тетраэдр. Как вы думаете, тогда расположение плоскостей, проходящих через вершину и перпендикулярных плоскости противоположной боковой грани изменится?

Учащийся: мне кажется, идея будет такой же.

Учитель: давайте попробуем построить сразу опорную конструкцию для этого случая.

Учитель: давайте продолжим варьировать. что ещё можно изменить?

Учащийся: а что, если взять шестиугольную правильную пирамиду?

Учитель: попробуйте.

Строят. Получают опорную конструкцию

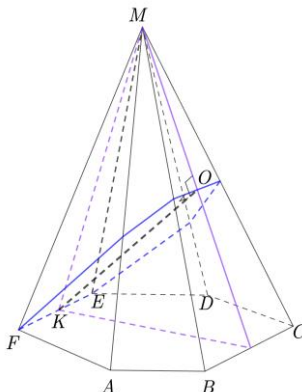


Рисунок 8 – Опорная конструкция в правильной шестиугольной пирамиде

Учитель: какой вывод можно сделать?

Учащийся: эта пирамида больше похожа на правильный тетраэдр по своим свойствам. А ещё вид сечения меняется в зависимости от числа боковых граней.

Учитель: да, то есть если в многограннике требуется исследовать множество плоскостей с двумя заданными свойствами – прохождением через определённую точку и перпендикулярностью некоторой плоскости, то их можно рассматривать как единый пучок. Его осью служит прямая, перпендикулярная данной плоскости и проходящая через заданную точку. Для построения и анализа сечения достаточно рассмотреть все возможные случаи пересечения этого пучка с рёбрами многогранника. Количество и форма получающихся сечений определяются числом рёбер, которые пересекает плоскость из данного пучка, причём при переходе от одной грани к другой характер сечения может меняться (например, с треугольника на четырёхугольник или пятиугольник), что зависит от числа боковых граней многогранника.

Данное обобщение может быть применено к решению следующих типов задач:

1. Нахождение сечений в любых многогранниках при условии, что секущая плоскость содержит заданную точку и перпендикулярна другой, заданной плоскости (либо параллельна ей).
2. Определение наибольших и наименьших значений площади или периметра сечения при изменении положения плоскости в пучке.
3. Обоснование количества возможных конфигураций при решении задач типа IV (на существование).
4. Сравнительный анализ различных многогранников (призмы, пирамиды, тетраэдры) с точки зрения применимости единого метода.

Стоит отметить, что в ходе работы с задачей учащиеся сталкиваются с трудностью визуализации пространственного расположения – как именно опускается перпендикуляр из точки C на плоскость MAV и как все возможные плоскости α , проходящие через этот перпендикуляр, пересекают пирамиду. Если такая гипотеза у учащихся не возникла самостоятельно, то для преодоления этой трудности учитель провоцирует учащихся на выдвижение гипотезы, которая на первый взгляд кажется техническим приёмом, но на самом деле меняет способ мышления: «А что, если мы посмотрим на пирамиду не сверху, а сбоку – так, чтобы грань MAV оказалась основанием?». Суть этой гипотезы заключается в смене ракурса восприятия пространственной конструкции. Когда пирамида мысленно «переворачивается» или поворачивается так, что плоскость грани MAV становится плоскостью чертежа, вся трёхмерная картина упрощается – перпендикуляр из точки C на плоскость MAV становится привычной высотой пирамиды.

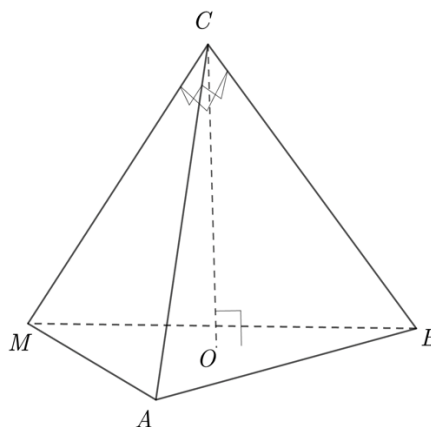


Рисунок 9 – Перевернутая пирамида

Форма ведения несократического диалога определяется его спецификой. Учитель начинает с фронтальной работы: он обращается ко всему классу и задаёт общий вопрос. Характер этого вопроса зависит от типа задачи. Поскольку заранее предполагается отсутствие однозначного ответа, класс делится на группы. Каждая группа формулирует и отстаивает собственную позицию. Далее возможны разные сценарии. Обсуждение может проходить сначала внутри групп, а затем выноситься на общее рассмотрение. Либо группы сразу вступают в полемику друг с другом. Выбор зависит от количества выдвинутых идей и их содержания.

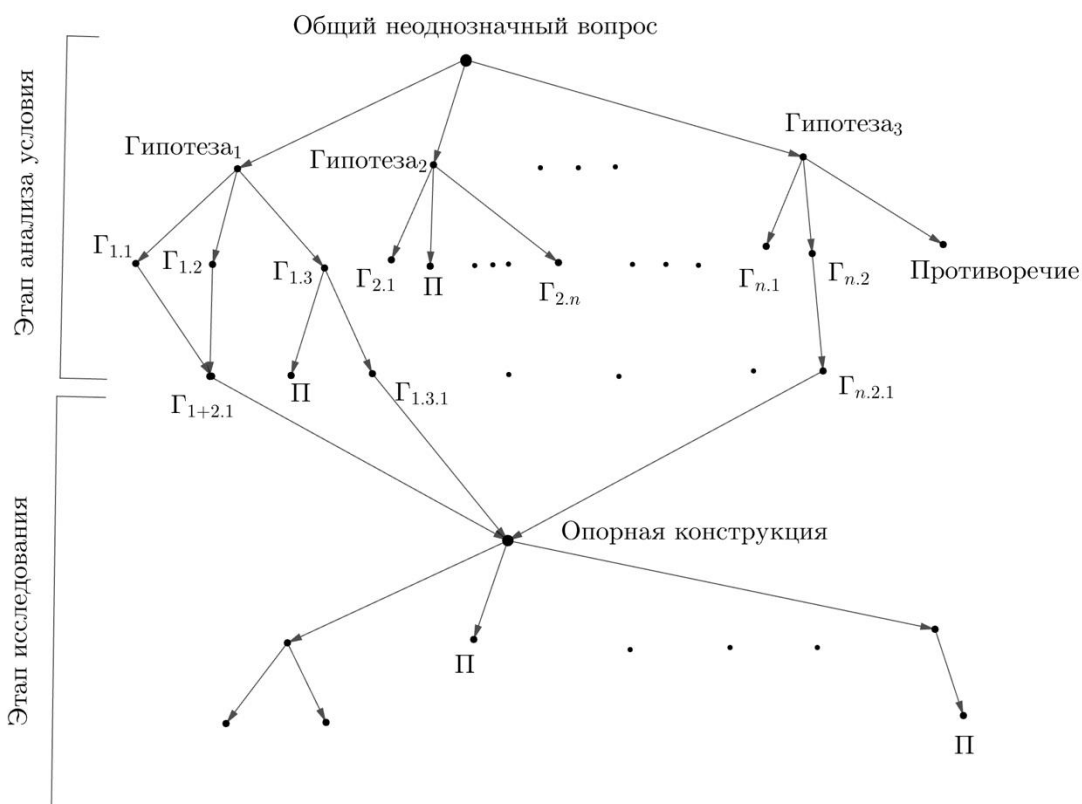
Основная трудность при такой организации работы связана с удержанием внимания аудитории. При групповом обсуждении учащиеся нередко теряют фокус или отвлекаются от темы занятия. Снизить этот риск помогают два приёма. Во-первых, фиксация ключевых положений на доске. Во-вторых, регулярное возвращение к исходной идее урока.

Отдельно остановимся на реакции учителя. Она не должна содержать оценок. Ученик в такой ситуации не угадывает верный ответ, который педагог потом подтвердит или опровергнет. Он сам исследует проблему и выдвигает предположения. Учитель же только фиксирует высказанные гипотезы. Реакция учителя в таких ситуациях может быть «я тебя услышал» или «принято». Учащиеся должны воспринимать их как сигнал фиксации, а не как одобрение.

Если нет уверенности, что это различие понятно, учителю лучше ограничиться словом «так».

На достижение целей обучения влияет готовность участников. В классах с углублённым изучением математики учащиеся чаще всего демонстрируют интерес к предмету, и это поддерживает их активность. Стоит отметить, что такие учащиеся уже обладают развитой математической речью, что позволяет им вести диалог, но при этом дополнительная практика в аргументации собственных позиций, позволяет им еще больше расти в этом направлении.

В соответствии с описанной методикой ведения несократического диалога, можно его проиллюстрировать следующей схемой 2.



*Схема 2 – Методика работы с задачей
с использованием несократического диалога*

Заметим, что стартовым элементом схемы является общий неоднозначный вопрос, который задаёт направление всему последующему обсуждению и создаёт ситуацию, в которой учащиеся самостоятельно осознают неопределённость, заложенную в условии задачи.

Общий неоднозначный вопрос провоцирует появление нескольких гипотез, что на схеме показано несколькими ответвлениями от вопроса к гипотезам Γ_1 , Γ_2 и т.д. Далее к гипотезам учителем задаются гипотетические и критические вопросы, которые провоцируют учащихся либо создать новые гипотезы – $\Gamma_{1.1}$, $\Gamma_{1.2}$, $\Gamma_{1.3}$, $\Gamma_{2.1}$, $\Gamma_{2.2}$ и др., либо прийти к противоречию – П. Каждая изначально выдвинутая гипотеза (Γ_1 , Γ_2 и т.д.) и последующие уточненные ($\Gamma_{1.1}$, $\Gamma_{1.2}$, $\Gamma_{1.3}$, $\Gamma_{2.1}$, $\Gamma_{2.2}$ и далее) фиксируются как возможный вариант прочтения условия. По мере обсуждения гипотезы могут уточняться, порождать подгипотезы (как показано на примере $\Gamma_{1.3.1}$, $\Gamma_{1.1.1}$, $\Gamma_{1.2.1}$, $\Gamma_{n.2.1}$) или опровергаться (П). Разветвлённая структура этой части схемы отражает многовариантность начального этапа диалога, когда учащиеся предлагают различное понимание условия и возможные конфигурации геометрических объектов.

После анализа условия и получения нескольких готовых гипотез, соответствующих разным геометрическим конфигурациям, диалог с помощью вопросов ведёт к их обобщению и появлению опорной конструкции. Этот этап наступает тогда, когда в ходе анализа условия и проверки гипотез выявлены все возможные случаи и отсеяны те из них, которые противоречат логике построения или условиям задачи

На заключительном этапе работы с задачей начинается новый виток диалога. Неоднозначный вопрос ставится теперь к самой опорной конструкции в технологии варьирования, и это порождает новый цикл шагов. Снова выдвигаются гипотезы, обсуждаются возможные изменения параметров или условий, проверяются варианты и формулируются обобщающие выводы.

Схема 2 показывает, как диалог движется от исходной неопределённости через множественность гипотез к опорной конструкции, а затем к её варьированию и обобщению.

Таким образом, в параграфе освещены ключевые положения методики использования несократического диалога при обучении стереометрии, состоящие в:

1. Целью применения данного вида диалога является формирование обобщенного знания связанной с конструкцией. В связи с этим применение данного вида диалога наиболее целесообразно на этапе систематизации и обобщения знаний.

2. Систематизация и обобщение знаний осуществляется в ходе использования исследовательской стратегии при решении частично открытых задач определенных типов III-V посредством использования несократического диалога, что создает условия для развития учебно-исследовательских умений учащихся.

3. Методика активного использования несократического диалога при решении частично открытой задачи предполагает две фазы: 1) старт решения задачи, предполагающий анализ условия, выявление неопределённости, выдвижение и проверку первичных гипотез о возможных геометрических конфигурациях; 2) заключительный этап работы с задачей, предполагающий варьирование опорной конструкции, исследование изменения параметров условия или заключения, выявление инвариантных свойств и обобщение, охватывающее целый класс ситуаций.

Первая фаза завершается созданием опорной конструкции, которая обобщает все возможные (не противоречащие логике и условию) гипотезы, возникшие в ходе анализа условия, и служит основой для дальнейшего решения задачи; вторая фаза представляет собой новый виток несократического диалога, порождающий исследование задачи через варьирование опорной конструкции.

4. При организации несократического диалога в каждой фазе выделяется пять шагов (постановка задачи, выявление неопределённости, выдвижение гипотез, проверка гипотез, вывод), которые соответствуют логике осуществления учебного исследования и предполагают преимущественное использование выделенных типов вопросов (уточняющий, направляющий, гипотетический, критический, обобщающий).

Итак, в параграфе решены следующие задачи:

1. Обосновано, что применение неосократического диалога наиболее целесообразно на этапе систематизации и обобщения знаний урока общеметодологической направленности. Целью данного вида диалога является формирование обобщённого знания, связанного с опорной конструкцией. Работа на заключительном этапе решения частично открытой задачи с помощью варьирования полученной опорной конструкции, организованная с использованием неосократического диалога, позволяет выстроить систему знаний вокруг этой конструкции.

2. Разработана методика использования неосократического диалога при работе с частично открытыми стереометрическими задачами, включающая пять последовательных шагов: постановка задачи с опорой на пространственную конфигурацию; выявление неопределённости, заданное многовариантностью взаимного расположения элементов фигуры; выдвижение гипотез, проверка гипотез, обобщающий вывод в виде опорной стереометрической конструкции. Каждому шагу соответствует тип вопроса учителя: уточняющий, направляющий, гипотетический, критический, обобщающий.

3. Определена логика этапов построения урока стереометрии общеметодологической направленности с использованием неосократического диалога. Для каждого этапа описаны действия учителя, действия учащихся и развиваемые учебно-исследовательские умения.

4. Выделены две фазы работы с частично открытой задачей в рамках неосократического диалога. Первая фаза связана с анализом условия, выявлением неопределённости, выдвижением и проверкой гипотез и завершается созданием опорной конструкции. Вторая фаза представляет собой новый виток неосократического диалога на заключительном этапе работы с задачей: варьирование опорной конструкции, исследование изменения параметров условия или заключения, выявление инвариантных свойств и формулирование обобщения, охватывающего целый класс ситуаций.

5. На примере задачи типа III (о множестве плоскостей, проходящих через вершину пирамиды перпендикулярно грани) проиллюстрирована реализация разработанной методики. Показано движение от постановки общего неоднозначного вопроса через фиксацию множественности гипотез, их проверку и выявление противоречий к построению опорной конструкции. Варьирование вида многогранника (правильный тетраэдр, четырёхугольная и шестиугольная пирамиды) позволило выйти к обобщению о пучке плоскостей, проходящих через перпендикуляр к данной плоскости, и о зависимости формы сечения от числа боковых граней многогранника.

6. Разработана схема организации несократического диалога, отражающая движение от исходной неопределённости через множественность гипотез к опорной конструкции, а затем к обобщению через варьирование. Определены требования к готовности учителя и учащихся для успешной реализации методики. От учителя здесь требуется прежде всего владеть соответствующей диалогической методикой преподавания, а от учащихся требуются мотивация к учебной деятельности и владение учебным математическим языком.

§7. Методика изучения темы «Углы в пространстве» с использованием несократического диалога

Описанную методику необходимо реализовать на конкретном материале. Мы выбрали тему «Углы в пространстве» из курса 10 класса, так как она завершает изучение взаимного расположения прямых и плоскостей и логически предшествует расстояниям в пространстве. Здесь учащиеся впервые связывают признаки параллельности и перпендикулярности в единую систему, а измерение углов даёт основу для количественных характеристик пространственных фигур. Наконец, тема расстояний требует более высокого уровня абстракции и осваивается школьниками с большими трудностями.

При этом тема «Углы в пространстве» вызывает у учащихся затруднения в связи с необходимостью оперировать не самими заданными объектами, а их проекциями или вспомогательными сечениями. Так, один и тот же угол можно построить разными способами. Например, для приведения скрещивающихся прямых к пересекающимся выбирают различные вспомогательные плоскости. Правильный ответ может быть получен разными путями. Выбор рационального способа требует осознанного анализа конфигурации.

Также содержание темы обладает высоким потенциалом для организации диалога в рамках учебно-исследовательской деятельности. При её изучении учащиеся сталкиваются с необходимостью оперировать взаимными положениями прямых и плоскостей, понимать связь между пространственной конструкцией и плоскими фигурами, полученными в результате рассмотрения сечений, выделять опорные элементы для построения угла и обосновывать корректность построения. Поэтому вопросы, относящиеся к выделенным в параграфе 6 типам, естественным образом интегрируются в процесс обучения. К числу таких вопросов относятся уточняющие («Что понимается под углом между скрещивающимися прямыми? Каким образом его можно построить/измерить?»), направляющие («Как в этой конфигурации заменить скрещивающиеся прямые пересекающимися? Какая вспомогательная плоскость упростит построение?»), гипотетические («Возможен ли тупой угол

между прямой и плоскостью? Допустим ли двугранный угол, величина которого превышает 180° ?»), критические («Почему в этом рассуждении нельзя сразу применить теорему о трёх перпендикулярах? Где возникает противоречие?») и обобщающие («От чего зависит величина угла между плоскостями в призме? Что изменится, если изменить отношение бокового ребра к стороне основания?»).

Особую роль в организации диалога играют опорные конструкции и выделение в фигурах соответствующих элементов (перпендикуляров, проекций, линейных углов) позволяет учащимся осознать, какие теоретические знания (определения углов, признаки перпендикулярности, свойства параллельных и скрещивающихся прямых) работают в каждой конкретной конструкции. Использование опорных конструкций не только облегчает ведение диалога (поскольку учащиеся имеют дело с конкретными, наглядными объектами), но и служит предметом совместного исследования. В ходе диалога, варьируя параметры опорной конструкции (например, заменяя прямую или плоскость в призме), учащиеся приходят к осознанию инвариантности способов построения углов. Это позволяет им в дальнейшем переносить освоенные приёмы на новые, более сложные конфигурации.

Тема «Углы в пространстве» не только даёт материал для несократического диалога, но и естественным образом располагает к нему. Её содержание естественно выстраивается как учебное исследование. Тема делится на три раздела: угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями. В каждом разделе есть урок общеметодологической направленности, где материал систематизируется и обобщается. В нашей методике три таких урока в соответствии с темами и каждый из них сдвоенный. Структура урока строится в соответствии с логикой задачного подхода вокруг частично открытой задачи и несократического диалога, сопровождающего работу с ней. Так учащиеся не только отрабатывают вычисления, но и видят связи между конфигурациями, выделяют опорные конструкции и формулируют выводы, применимые к

целому классу задач. Сдвоенный формат уроков объясняется тем, что такой диалог требует большего времени, особенно на начальном этапе, когда такой способ работы ещё непривычен. Сдвоенный урок позволяет не прерывать диалог и довести полный цикл исследования до завершения.

Первый урок посвящён теме «Угол между прямыми». В качестве объектов выбраны скрещивающиеся прямые, так как этот вид взаимного расположения прямых для учащихся новый и вызывает затруднения и при распознавании, и при определении величины угла.

Второй сдвоенный урок (урок общеметодологической направленности по теме «Угол между прямой и плоскостью») строится вокруг задачи, требующей варьирования положения прямой или плоскости. В ходе несократического диалога учащиеся систематизируют различные положения прямых и плоскостей осознают границы применимости каждого способа поиска угла между ними и выявляют инвариантные свойства.

Третий сдвоенный урок (урок общеметодологической направленности по теме «Угол между плоскостями») включает работу с частично открытой задачей, в которой условие содержит явную или скрытую неопределённость (например, неоднозначное положение плоскости или свободный параметр), что инициирует выдвижение гипотез и их коллективную проверку в ходе несократического диалога. Учащиеся обобщают способы построения линейного угла двугранного угла, сопоставляют полученный угол с углом между перпендикулярами к этим плоскостям. На основе сопоставления формулируются принципы, общие для рассматриваемого типа задач.

Покажем применение диалога к задаче типа III в теме «Угол между прямыми».

Дан куб: ABCDA₁B₁C₁D₁. На ребре A₁B₁ взята точка N, на ребре DD₁ точка M. Найдите угол между прямыми BN и CM.

Учитель (постановка общего неоднозначного вопроса): как расположены прямые BN и CM?

Учащийся 1: они пересекаются.

Учащийся 2: они параллельны.

Учащийся 3: они скрещиваются.

Выявляем противоречие в гипотезах.

Учащийся 1: они скрещивающиеся, потому что не лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Учитель (уточняющий вопрос): как вы это определили?

Учащийся 1: точка В принадлежит грани AA_1B_1B , точка N тоже на этой грани, значит, прямая BN лежит в этой грани. А прямая CM.... (далее обоснование)

Учитель (направляющий вопрос): принято. Какой способ нахождения угла между скрещивающимися прямыми вы знаете?

Учащийся 2: есть много, но в данной ситуации удобно воспользоваться свойством из определения, так как грани параллельны.

(далее строят параллельную прямую)

Учитель (гипотетический вопрос): отлично. Тогда что мы можем сказать об угле между BN и CM?

Учащийся 4: он равен углу между CN' и CM. эти две прямые уже лежат в одной плоскости грани CC_1D_1D .

Учитель (направляющий вопрос): найдите этот угол.

Учащиеся осознают, что условие недостаточно.

Учащийся 4: точки N и M на рёбрах не зафиксированы. в зависимости от того, где их взять, расположение прямых может меняться и угол тоже.

Учитель (направляющий вопрос): что же делать, если условие не определяет положение точек однозначно?

Учащийся 1: нужно доопределить условие. давайте для начала возьмём частный случай – пусть N и M – середины своих рёбер.

Учитель (гипотетический вопрос): принято. давайте теперь найдем угол BN и CM?

Находят.

Учитель: хорошо, а что если взять

Учитель (обобщающий вопрос на этапе фиксации опорной конструкции): хорошо. а что, если N и M не середины ребер. Сохранится ли наш способ?

Учащийся 1: да, способ тот же. Только поиск угла будет немного труднее осуществляться.

Учитель (фиксация опорной конструкции): давайте зафиксируем то общее, что мы сейчас сделали. Какая конструкция повторяется во всех случаях?

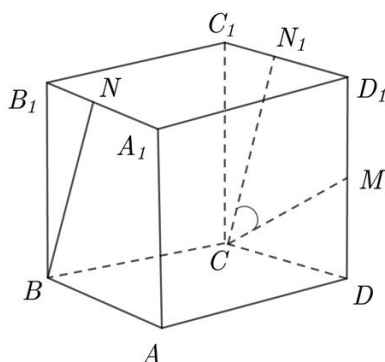


Рисунок 10 – Опорная конструкция

Начинается вторая фаза – варьирование опорной конструкции для обобщения.

Возможен следующий диалог:

Учитель: хорошо, а что, если бы нам в условии был дан не куб, а прямоугольный параллелепипед? Смогли бы мы произвести все те же самые действия?

Учащийся: да, смогли бы. Грани также параллельны, перенос возможен.

Учитель: хорошо, тогда нарисуйте опорную конструкцию, которая получится в результате работы с прямоугольным параллелепипедом.

Учащиеся рисуют.

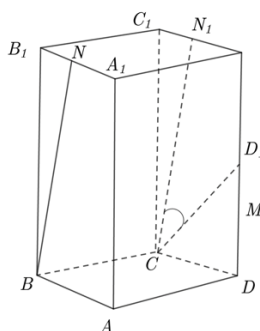


Рисунок 11 – Опорная конструкция с прямоугольным параллелепипедом

Учитель: а если бы параллелепипед был наклонным?

Учащийся: тоже работает, потому что противоположные грани параллельны в любом параллелепипеде, даже в наклонном.

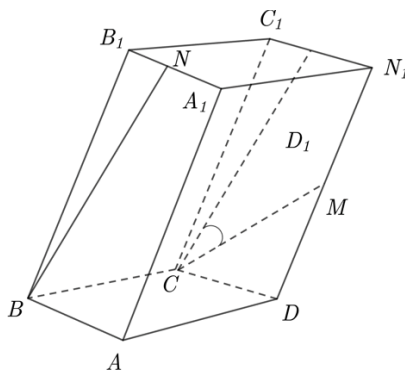


Рисунок 12 – Опорная конструкция с наклонным параллелепипедом

Учитель: хорошо. А если бы у нас был не параллелепипед, а треугольная призма?

Учащийся: тогда бы не получилось параллельно перенести. У треугольной призмы нет противоположащих параллельных граней что затруднило бы проведение параллельной прямой.

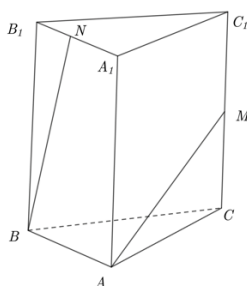


Рисунок 13 – Опорная конструкция с треугольной призмой

Учитель: принято. Давайте дальше варьировать. Что, если бы мы работали не с призмой, а с пирамидой? Например, четырёхугольная пирамида, и отрезки даны в двух гранях. Тогда?

Учащийся: тогда бы тоже ничего не получилось. В пирамиде нет параллельных граней, поэтому способ не работает.

Здесь можно вывести к противоречию.

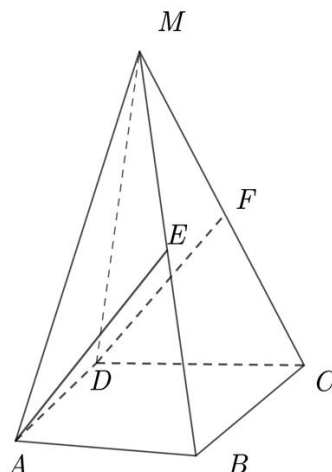


Рисунок 14 – Опорная конструкция с четырёхугольной пирамидой

Учитель: а если отрезки расположены в смежных гранях четырёхугольной пирамиды?

Учащийся: всё равно не получилось бы.

Учитель: а в треугольной пирамиде?

Учащийся: тем более нет.

Учитель: давайте сформулируем обобщение. В каких пространственных фигурах наша опорная конструкция работает, а в каких нет?

Учащийся: работает в кубе, в любом параллелепипеде (прямоугольном и наклонном), в любой четырёхугольной призме и не работает в треугольной призме, потому что нет противоположных параллельных граней, и не работает в пирамидах любых, потому что там также нет параллельных граней.

Учитель: верно. таким образом, обобщение может быть следующим: способ нахождения угла между скрещивающимися прямыми через построение прямой, параллельной одной из данных, в плоскости другой прямой, применим тогда и только тогда, когда структура фигуры позволяет осуществить такое построение с использованием её элементов. Критерием применимости является наличие двух параллельных плоскостей, каждая из которых содержит по одной из данных прямых.

Далее кратко охарактеризуем вторую и третью пары уроков.

На втором сдвоенном уроке по теме «Угол между прямой и плоскостью» используется частично открытая задача, в которой точка на ребре многогранника или положение самой прямой не заданы однозначно. В ходе неосократического диалога учащиеся выдвигают гипотезы о возможных положениях прямой относительно плоскости, определяют, во всех ли случаях угол существует, и устанавливают, что способ нахождения угла через проекцию прямой на плоскость сохраняется независимо от выбора конкретной конфигурации. Обобщением становится опорная конструкция, фиксирующая связь между наклонной, её проекцией и перпендикуляром.

На третьем сдвоенном уроке, по теме «Угол между плоскостями», рассматривается задача с неоднозначным положением плоскостей внутри фигуры. В диалоге учащиеся исследуют плоскости. Обобщением становится опорная конструкция, связывающая линейный угол с перпендикулярами к ребру двугранного угла. Она позволяет перейти от угла между плоскостями к углу между перпендикулярами, проведёнными к этим плоскостям.

Таким образом, в параграфе проиллюстрирована методика использования неосократического диалога на примере темы «Углы в пространстве», обоснована целесообразность трёх сдвоенных уроков общеметодологической направленности, соответствующих разделам темы. На примере задачи о нахождении угла между скрещивающимися прямыми в кубе показана реализация двух фаз диалога. Первая фаза (анализ условия) включает постановку общего неоднозначного вопроса, выявление неопределённости, выдвижение и проверку гипотез, фиксацию опорной конструкции. Вторая фаза (заключительный этап работы с задачей) предполагает варьирование опорной конструкции: куб заменяется прямоугольным параллелепипедом, наклонным параллелепипедом, призмой, пирамидой. Это позволяет выявить границы применимости найденного способа действия. Обобщение приводит учащихся к самостоятельному выводу: опорная конструкция, основанная на проведении параллельной прямой к одной из скрещивающихся прямых, применима в тех многогранниках, где есть параллельные грани.

Разработанную методику можно распространить на другие темы стереометрии.

Таким образом, в параграфе мы решили следующие задачи:

1. Обоснован выбор темы «Углы в пространстве». Тема связывает позиционные и метрические отношения в стереометрии. Она вызывает у учащихся затруднения, связанные с необходимостью оперировать проекциями и вспомогательными построениями. Тема обладает высоким потенциалом для организации диалога в рамках учебно-исследовательской деятельности.

2. Разработана структура изучения темы, состоящая из трёх сдвоенных уроков общеметодологической направленности. Каждый урок соответствует одному из разделов: угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями.

3. На примере задачи на нахождение угла между скрещивающимися прямыми в кубе продемонстрирована реализация двух фаз несократического диалога: первая фаза (анализ условия) – постановка общего неоднозначного вопроса, выявление неопределённости, выдвижение и проверка гипотез, фиксация опорной конструкции; вторая фаза (заключительный этап) – варьирование опорной конструкции через изменение вида многогранника.

4. Показано, как варьирование опорной конструкции (куб → прямоугольный параллелепипед → наклонный параллелепипед → треугольная призма → четырёхугольная пирамида → треугольная пирамида) позволяет выявить границы применимости найденного способа действия. В результате обобщения учащиеся самостоятельно приходят к выводу, что способ построения угла через параллельный перенос применим в тех многогранниках, где есть параллельные грани (критерий применимости – наличие двух параллельных плоскостей, каждая из которых содержит по одной из данных прямых).

5. Установлено, что разработанная методика может быть экстраполирована на другие темы стереометрии и использована для развития

учебно-исследовательских и коммуникативных умений учащихся в классах с углублённым изучением математики.

§8. Методика проведения и результаты экспериментального исследования

В этом параграфе представлено описание четырехлетнего педагогического эксперимента по проверке гипотезы исследования: использование разработанной методики применения неосократического диалога при решении частично открытых стереометрических задач на этапе систематизации и обобщения знаний способствует:

а) развитию у учащихся учебно-исследовательских умений: формулировать гипотезу о свойствах пространственной конструкции, задавать содержательный математический вопрос, выявлять противоречие в ходе решения математической (стереометрической) задачи, обобщать полученные данные, делать выводы;

б) развитию коммуникативных умений (аргументировано и последовательно строить устное математическое рассуждение, воспринимать иное математическое рассуждение с проверкой на непротиворечивость);

в) повышению качества овладения стереометрическим материалом.

При этом показателями повышения качества овладения стереометрическим материалом считаем:

- увеличение количества учащихся, верно решивших стереометрические задачи;

- использование ранее созданной опорной стереометрической конструкции для решения задачи;

- модификация созданной ранее опорной конструкции в новой ситуации с целью последующего обобщения.

Чтобы оценить результаты экспериментальной работы, мы выделили уровни сформированности диагностируемых умений. Выделение уровней необходимо, так как методика неосократического диалога предполагает качественные изменения в деятельности учащихся. Эти изменения не исчерпываются количеством верно решённых задач. Уровневая

дифференциация позволяет зафиксировать, насколько самостоятельно учащийся выдвигает гипотезы, формулирует содержательные вопросы, обнаруживает противоречия и строит аргументированные рассуждения. Поэтому мы определили три уровня сформированности учебно-исследовательских умений, коммуникативных умений и качества владения стереометрическим материалом. Это высокий, средний и низкий уровни. Содержательные характеристики каждого уровня мы привели в таблицах 5, 6 и 7.

Таблица 5 – Характеристика уровней сформированности исследовательских умений

Уровень	Характеристика уровня
Высокий	Учащийся самостоятельно выдвигает содержательную гипотезу о поведении изучаемой величины. Эту гипотезу он обосновывает и проверяет на частных случаях. Кроме того, учащийся формулирует точный математический вопрос, позволяющий перевести неопределённую ситуацию в задачу с чётким алгоритмом решения. Наряду с этим учащийся обнаруживает противоречие в ходе рассуждения. Он делает это самостоятельно, без внешней стимуляции. Также предлагает несколько разнотипных направлений исследования математического объекта.
Средний	Гипотезу выдвигает, но она носит общий, неконкретный характер (например, указывает на факт изменения, но не на характер этого изменения) и не проверяется на частных случаях; вопрос формулирует, но он не является содержательным (например, сводится к пересказу условия или просьбе найти величину без указания возможного способа); противоречие в рассуждении замечает с помощью наводящих вопросов; предлагает несколько направлений исследования, но они однотипны или не ведут к содержательному анализу конфигурации.
Низкий	Гипотезу не выдвигает или выдвигает заведомо неверную/бессодержательную; содержательный вопрос не сформулирован либо не имеет отношения к математическому содержанию рассматриваемой ситуации; противоречие в ходе решения не обнаружено даже при наличии грубой ошибки; не предлагает ни одного направления исследования либо предлагает формальные вопросы, не требующие математического анализа.

Таблица 6 – Характеристика уровней сформированности коммуникативных умений

Уровень	Характеристика уровня
Высокий	Учащийся строит аргументированное и последовательное рассуждение, в котором каждый шаг логически вытекает из предыдущего; при проверке чужого решения формулирует точный наводящий вопрос, который помогает собеседнику самостоятельно обнаружить противоречие (вопрос не содержит прямого указания на ошибку, но направляет внимание на проблемный шаг); демонстрирует способность воспринимать чужое рассуждение критически, проверяя его на непротиворечивость и указывая на логические разрывы.
Средний	Рассуждение выстроено, но содержит логические погрешности или неполные обоснования (некоторые шаги пропущены или приняты на веру без доказательств); наводящий вопрос сформулирован, но он слишком общий и не помогает точно локализовать противоречие; при проверке чужого рассуждения замечает ошибку, но не может объяснить, почему она противоречит условию или известным математическим фактам.
Низкий	Рассуждения фрагментарны или отсутствуют – ответы представляют собой отдельные математические выражения или формулы без пояснений и логических связей; при проверке чужого решения не задаёт уточняющих вопросов и не замечает ошибок; не проявляет критического отношения к предложенному тексту решения, соглашаясь с любым утверждением без проверки.

Таблица 7 – Характеристика уровней владения стереометрическим материалом

Уровень	Характеристика уровня
Высокий	Учащийся демонстрирует верное решение стереометрических задач; осознанно строит и использует опорные конструкции (сечения, дополнительные плоскости, вспомогательные треугольники); при необходимости модифицирует опорную конструкцию в новой ситуации; правильно определяет углы между прямыми и плоскостями, корректно применяет теоремы.
Средний	Стереометрические задачи решает, но допускает негрубые ошибки: путает элементы чертежа, ошибается в вычислениях, неверно определяет угол между прямой и плоскостью, однако общий ход решения верен; опорную конструкцию использует, но испытывает затруднения при её изменении в новой ситуации; теоремы применяет формально, без полного понимания их геометрического смысла.
Низкий	Стереометрические задачи не решены или решены неверно: неверно определён угол, неверно построена проекция, ошибочно выбран треугольник для вычислений или неверно применена теорема; опорная конструкция не используется либо построена принципиально неверно; ответ отсутствует или математически бессмыслен.

Исследование проводилось на базе нескольких образовательных учреждений Санкт-Петербурга: СУНЦ «Академическая гимназия им. Д. К. Фаддеева СПбГУ», ГБОУ Гимназия №261, ГБОУ Гимназия №526, ФМЛ №366, ФМЛ №30, ФТШ им. Ж. И. Алфёрова. Всего в педагогическом эксперименте приняли участие 386 учеников десятых и одиннадцатых классов.

В соответствии с логикой педагогического исследования эксперимент включал три последовательных этапа: констатирующий, поисковый и формирующий.

Констатирующий этап проводился в середине 10 класса и был направлен на диагностику исходного уровня сформированности у учащихся учебно-исследовательских, коммуникативных умений, а также качества овладения стереометрическим материалом.

Была разработана письменная работа, включавшая три частично открытые стереометрические задачи: с параметром (тип III), на анализ существования (тип IV) и с несформулированным требованием (тип V). Каждая задача сопровождалась специальными заданиями, направленными на выявление способности учащихся выдвигать гипотезы, формулировать содержательные математические вопросы и обнаруживать противоречия в ходе решения.

Первая задача (тип III – с параметром). Учащимся предлагалось условие, содержащее свободный параметр, изменение которого влияло на результат. Задача сопровождалась неоднозначным вопросом учителя, помогающим осознать недостаточность условия. Учащимся предлагалось самостоятельно сформулировать гипотезу о характере зависимости искомой величины от параметра, а также задать содержательный математический вопрос о том, какие дополнительные условия могли бы сделать решение определённым.

Вторая задача (тип IV – на анализ существования). Учащимся предъявлялась неверно решённая задача. Задание состояло из двух частей. В

первой части требовалось определить, правильно ли решена задача, найти ошибки и исправить их. Во второй части предлагалось представить, что так решил задачу сосед по парте, который просит проверить решение. Учащемуся необходимо было сформулировать вопросы соседу таким образом, чтобы тот понял, где у него ошибка, но без прямого указания на неё. Данное задание было направлено на выявление умения обнаруживать противоречие в ходе решения и задавать содержательные вопросы, стимулирующие рефлексию.

Третья задача (тип V – с несформулированным требованием).

Учащимся предлагалось условие, в котором требование отсутствовало или было сформулировано в общей, неопределённой форме. Задание состояло в том, чтобы самостоятельно сформулировать различные вопросы, которые можно задать для исследования предложенной геометрической конфигурации, и выбрать одно из направлений для последующего анализа. Разработанное задание было ориентировано на диагностику способностей учащихся к построению предположений о развитии исследования и постановке корректных математических вопросов, а также их разрешениях.

Полный текст работы приведены в Приложении 2.

На выполнение отводилось 40 минут. Работа оценивалась по 100-балльной шкале: за первую и вторую задачи максимально выставлялось по 30 баллов, за третью – 40 баллов, что отражало возрастающую сложность и объём самостоятельной деятельности учащихся при переходе от задачи с параметром к задаче с открытым требованием. Подробные критерии оценивания каждой задачи также представлены в Приложении 2.

На основе разработанной системы оценивания учащиеся распределялись по уровням сформированности исследовательских и коммуникативных умений, а также качества владения стереометрическим материалом в соответствии со следующей шкалой, представленной в таблице 8.

Таблица 8 – Шкала распределения учащихся по уровням

Суммарный балл	Уровень	Критерий отнесения
70–100	Высокий	Учащийся набрал 70 и более баллов, что свидетельствует о способности самостоятельно выдвигать содержательные гипотезы, формулировать точные математические вопросы, обнаруживать и объяснять противоречия в ходе решения, аргументированно строить рассуждение, а также верно решать стереометрические задачи с использованием и модификацией опорных конструкций.
40–69	Средний	Учащийся набрал от 40 до 69 баллов, что соответствует частичному владению указанными умениями: гипотезы и вопросы формулирует, но не всегда содержательно; противоречия замечает с помощью наводящих вопросов; рассуждения строит, но допускает логические погрешности; стереометрические задачи решает с недочётами; опорную конструкцию использует, но модифицирует с трудом.
0–39	Низкий	Учащийся набрал менее 40 баллов, что указывает на несформированность исследовательских и коммуникативных умений в рамках диагностики: гипотезы не выдвигает, вопросы не задаёт; противоречия не фиксирует; рассуждения фрагментарны или отсутствуют; стереометрические задачи не решены или решены неверно; опорная конструкция не используется.

В таблице 9 зафиксировано, сколько учащихся экспериментальной и контрольной групп отнесено к каждому из трёх уровней по итогам констатирующего этапа.

Таблица 9 – Распределение учащихся по уровням (кол. чел.)

Уровень	ЭГ (до), чел.	КГ (до), чел.
Высокий	7	8
Средний	25	21
Низкий	16	17
ИТОГО	48	46

Ниже представлены круговые диаграммы, иллюстрирующие процентное соотношение учащихся экспериментальной и контрольной групп по уровням развития исследовательских и коммуникативных умений, а также по уровню освоения стереометрического материала на начальном этапе исследования



Рисунок 15 – Распределение учащихся

в экспериментальной группе, %

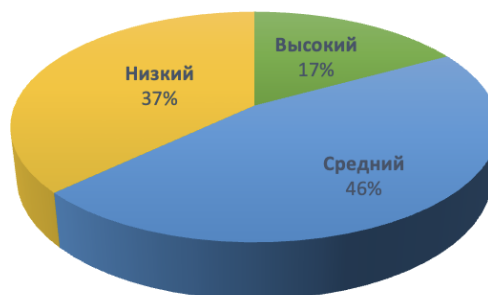


Рисунок 16 – Распределение учащихся

в контрольной группе, %

Для подтверждения сопоставимости экспериментальной и контрольной групп до начала формирующего этапа потребовалась статистическая проверка исходных данных. Выбор t-критерия Стьюдента обусловлен тем, что он предназначен для сравнения средних значений двух независимых выборок при количественной шкале измерения. В данном случае сравнивались средние баллы учащихся за диагностическую работу, что позволило оценить, являются ли наблюдаемые различия случайными или статистически значимыми. Проверка показала, что различия между группами на констатирующем этапе статистически незначимы ($t = 0,09$, $p > 0,05$). Это даёт основание рассматривать последующие изменения как результат применения разработанной методики.

Расчет t-критерия Стьюдента производился по формуле:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}},$$

где

$$\bar{x}_1 - \text{средний балл ЭГ, } \bar{x}_1 = \frac{7 \cdot 85 + 25 \cdot 55 + 16 \cdot 20}{48} = 47,71$$

$$\bar{x}_2 - \text{средний балл КГ, } \bar{x}_2 = \frac{8 \cdot 85 + 21 \cdot 55 + 17 \cdot 20}{46} = 47,28$$

s_1^2 – дисперсия, где $s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{n}$, то есть

$$s_1^2 = \frac{7(85-47,71)^2 + 25(55-47,71)^2 + 16(20-47,71)^2}{48} = 486,41$$

$$s_2^2 = \frac{8(85-47,28)^2 + 21(55-47,28)^2 + 17(20-47,28)^2}{46} = 549,68$$

Подставляем полученные результаты в формулу

$$t = \frac{47,71 - 47,28}{\sqrt{\frac{486,41}{48} + \frac{549,68}{46}}} = \frac{0,43}{4,7} = 0,091$$

Различия в средних баллах входной диагностики между экспериментальной и контрольной группами являются статистически незначимыми ($p > 0,05$). Полученный результат подтверждает, что на начальном этапе эксперимента группы были сопоставимы по уровню подготовки, что позволяет в дальнейшем рассматривать выявленные изменения как следствие применения разработанной методики.

Поисковый этап был посвящен уточнению и корректировке разрабатываемой методики. На этом этапе осуществлялся отбор учебного материала, конструирование частично открытых стереометрических задач, а также уточнение структуры неосократического диалога. Работа проводилась не только с учащимися, но и с учителями – в рамках конференций и проектов, в том числе на базе «Большой математической мастерской (БММ)».

Эксперимент с БММ проводился в два этапа. Первый этап (2024 год) был ориентирован на проверку готовности учащихся классов с углублённым изучением математики и их учителей к диалоговому исследовательскому взаимодействию на уроке. Оказалось, что с одной стороны, учащимся сложно держать в голове множественность гипотез и их обсуждать – отсюда появилась идея с опорными конструкциями. С другой стороны, в ходе работы с учителями выявилось, что многие педагоги испытывают затруднения при организации неосократического диалога в силу недостатка готовых конспектов и примеров, демонстрирующих его реализацию на конкретном стереометрическом материале. Это затруднение касалось как формулировки последовательных вопросов, соответствующих этапам диалога, так и

удержания логической линии обсуждения при работе с частично открытыми задачами.

Поэтому второй этап (2025 год) был организован как коллективная методическая работа группы учителей и студентов, направленная на создание конспектов уроков с использованием неосократического диалога. В рамках этого этапа разработанные материалы были апробированы на научно-практических конференциях. В частности, результаты работы были доложены на международной научной конференции «Современные проблемы математики и математического образования. 79-е Герценовские чтения» (Санкт-Петербург, РГПУ им. А. И. Герцена, 15–17 апреля 2026 года), Всероссийской научно-методической конференции «Физико-математическое и ИТ-образование в современном обществе» (Псков, Псковский государственный университет, 9–10 октября 2025 года), Российско-узбекской научно-методической конференции «Методика преподавания в современной школе: актуальные проблемы и инновационные решения» (Ташкент, 10–11 ноября 2025 года), VIII Международной научно-методической конференции (Донецк, ДонГУ, 18–20 декабря 2025 года).

Апробация разработанных конспектов на указанных мероприятиях позволила получить обратную связь от профессионального сообщества, выявить дополнительные аспекты, требующие уточнения, и скорректировать отдельные элементы методики. В совокупности это способствовало уточнению гипотезы исследования и доработке методики использования неосократического диалога при обучении стереометрии в классах с углубленным изучением математики.

На формирующем этапе проводилось обучение в экспериментальных и контрольных группах. В экспериментальной группе (ЭГ) (48 человек) обучение строилось на основе неосократического диалога при решении системы частично открытых стереометрических задач. В контрольной группе (КГ) (46 человек) учащиеся решали те же частично открытые задачи, но без специальной организации диалога, то есть в рамках традиционной

методики обучения, предполагающей объяснение учителем готовых способов решения и индивидуальную работу учащихся над задачами. Такая организация эксперимента позволила сопоставить результаты обучения, так как единственным варьируемым фактором выступало наличие или отсутствие систематического использования несократического диалога при работе с одним и тем же типом задач.

Особое внимание, согласно описанной методике, уделялось этапу систематизации и обобщения знаний. На заключительном этапе работы с частично открытой стереометрической задачей мы организовывали коллективное обсуждение. Учитель направлял его. Учащиеся выделяли опорную конструкцию, устанавливали связи между рассмотренными случаями, формулировали обобщающие выводы. Эти выводы применялись к целому классу аналогичных задач.

В контрольных группах работа строилась иначе. Задача завершалась традиционным разбором решения, учитель показывал образец. Опорные конструкции специально не выделялись, обобщения не формулировались. Такая схема соответствовала привычной практике обучения.

Организация завершающего этапа в экспериментальных группах давала учащимся больше. Они не просто получали ответ, а осознавали внутренние связи между рассмотренными случаями, выделяли инвариантные характеристики, формулировали обобщение, применимое к более широкому классу задач. По результатам эксперимента, систематическая работа такого рода развивала у учащихся экспериментальных групп умение переносить освоенные способы действия на новые ситуации.

Сформированность исследуемых умений на контрольном этапе оценивалась в соответствии с теми же уровневыми характеристиками, что и на констатирующем этапе, что обеспечивало сопоставимость результатов. Итоговая диагностика проводилась по похожим заданиям, но с небольшими вариациями для исключения эффекта узнавания.

Затем данные обрабатывались количественно и качественно.

Итак, полученное распределение учащихся по уровням сформированности исследуемых умений в экспериментальной и контрольной группах можно увидеть в таблице 10.

Таблица 10 – Распределение учащихся по уровням после эксперимента

Уровень	ЭГ (чел.)	КГ (чел.)
Высокий	22	10
Средний	21	23
Низкий	5	13

На гистограммах отражено изменение результатов учащихся (Рисунки 17 и 18).

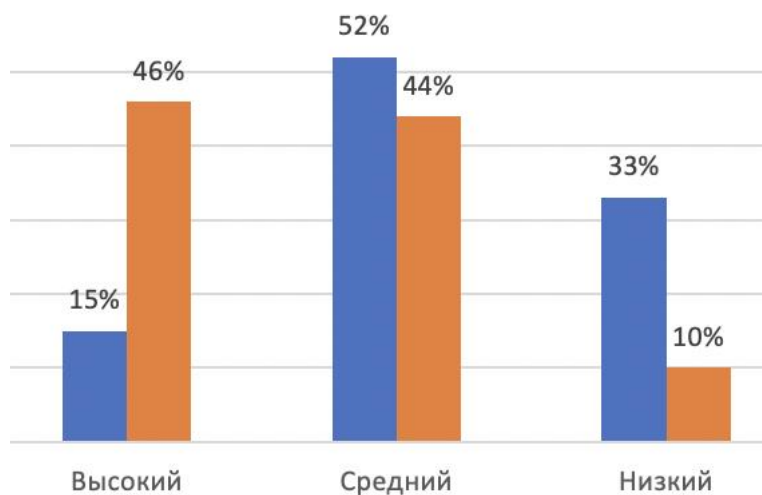


Рисунок 17 – Экспериментальная группа

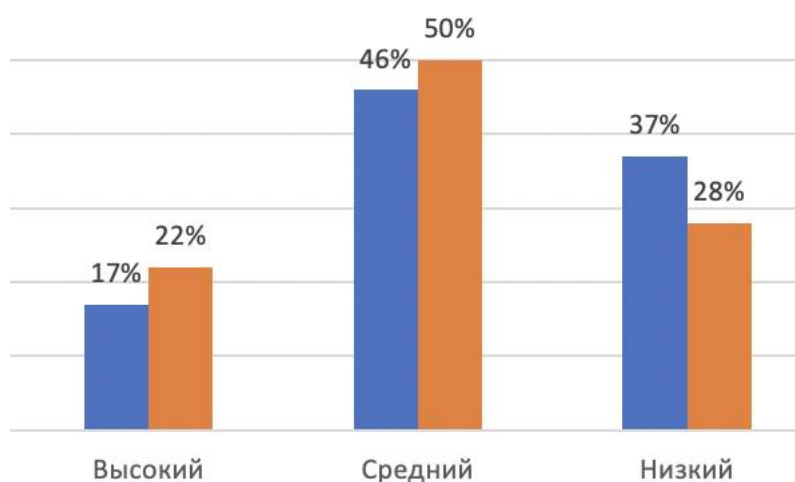


Рисунок 18 – Контрольная группа

Таким образом, рост доли высокого уровня в экспериментальных группах оказался заметно больше, чем в контрольных. Это свидетельствует о том, что именно наличие систематического использования неосократического диалога при решении частично открытых задач обеспечивает существенно более высокий прирост исследуемых умений по сравнению с решением тех же задач без специальной организации диалога.

Для оценки статистической значимости различий между распределениями в экспериментальных и контрольных группах на контрольном этапе был использован критерий χ^2 Пирсона. Критерий χ^2 Пирсона выбран потому, что он предназначен для сравнения эмпирических (фактических) распределений частот с теоретическими (ожидаемыми).

Расчет производился по формуле:

$$\chi_{\text{эксп}}^2 = n_1 n_2 \sum_{i=1}^g \left[\frac{1}{n_{i1} + n_{i2}} \left(\frac{n_{i1}}{n_1} - \frac{n_{i2}}{n_2} \right)^2 \right],$$

где $n_1=48$ – объем экспериментальной группы; $n_2=46$ – объем контрольной группы; $g=3$ – количество градаций признака (уровни сформированности); n_{i1} – количество учащихся экспериментальной группы, отнесенных к i -му уровню; n_{i2} – количество учащихся контрольной группы, отнесенных к i -му уровню.

Таблица 11 – Распределение учащихся

Уровень	Экспериментальная группа ($n_1 = 48$)	Контрольная группа ($n_2 = 46$)
Высокий	$n_{11} = 22$	$n_{12} = 10$
Средний	$n_{21} = 21$	$n_{22} = 23$
Низкий	$n_{31} = 5$	$n_{32} = 13$

Подставляя данные в формулу, получим:

$$\chi_{\text{эксп}}^2 = 48 \cdot 46 \left[\frac{1}{22+10} \left(\frac{22}{48} - \frac{10}{46} \right)^2 + \frac{1}{21+13} \left(\frac{21}{48} - \frac{23}{46} \right)^2 + \frac{1}{5+13} \left(\frac{5}{48} - \frac{13}{46} \right)^2 \right] = 8,1$$

Число степеней свободы определяется как:

$$df = (r-1) \cdot (c-1) = (3-1) \cdot (2-1) = 2,$$

где $r=3$ число строк (уровней), $c=2$ число столбцов (групп).

При двух степенях свободы ($df=2$) и уровне значимости $\alpha=0.05$ применяется следующее критическое значение: $\chi_{кр}^2 = 5,99$

Так как $\chi_{экс}^2 = 8,1 > \chi_{кр}^2 = 5,99$, то различия в распределении учащихся по уровням сформированности представленных умений между экспериментальной и контрольной группами являются статистически значимыми ($p<0.05$).

Полученный результат свидетельствует о том, что применение разработанной методики использования несократического диалога при обучении стереометрии способствует более существенному развитию учебно-исследовательских и коммуникативных умений учащихся, чем традиционное обучение.

Дополнительным показателем эффективности разработанной методики стали результаты итоговой контрольной работы по стереометрии (полный текст работы представлен в Приложении 3). Контрольная работа включала два типа заданий. Первый тип составляли стандартные закрытые стереометрические задачи, требующие применения известных алгоритмов и формул (вычисление углов между прямыми и плоскостями, расстояний между элементами многогранников). Второй тип включал частично открытые задачи со специальными дополнительными заданиями к ним.

Задачи частично открытого типа были сконструированы нами таким образом, что их решение требовало не только применения известных формул, но и узнавания опорной конструкции в новой геометрической ситуации, а также её адаптации к изменённым условиям.

Критерии оценивания итоговой контрольной работы были разработаны в соответствии с выделенными показателями повышения качества овладения стереометрическим материалом. Максимальный балл за работу составлял 100. Распределение баллов осуществлялось следующим образом:

- за верное решение закрытых задач (без использования опорных конструкций) можно было получить до 50 баллов;

- за использование ранее созданной опорной стереометрической конструкции для решения задачи (узнавание конструкции в новой ситуации и её корректное применение) выставялось до 25 баллов;

- за модификацию созданной ранее опорной конструкции в новой ситуации с целью последующего обобщения (изменение конструкции при изменении условий задачи, перенос способа действия на новый класс задач) выставялось до 25 баллов.

Такой подход к оцениванию позволял дифференцированно фиксировать не только факт решения задачи, но и уровень осознанности применения знаний, а также способность к переносу и обобщению. Критерии оценивания итоговой контрольной работы были непосредственно соотнесены с уровнями сформированности умений, представленными в таблице 6. Высокий уровень предполагал получение не менее 75 баллов при обязательном наличии не менее 20 баллов за модификацию опорной конструкции. Средний уровень соответствовал диапазону 50-74 балла. Низкий уровень фиксировался при результате менее 50 баллов. Такое соотнесение позволило объединить данные диагностики исследовательских и коммуникативных умений с результатами предметной контрольной работы в единую систему оценки.

Средний балл в экспериментальных группах составил 82,3, в контрольных – 74,1. Различия между группами являются статистически значимыми ($t = 3,28$, $p < 0,05$ по t-критерию Стьюдента). Здесь выбран t-критерий Стьюдента, потому что он предназначен для сравнения средних арифметических значений двух независимых выборок. В данном случае зависимая переменная измеряется по количественной (интервальной) шкале (баллы), что позволяет корректно вычислять средние и оценивать разницу между ними. Кроме того, критерий позволяет определить, является ли наблюдаемая разница средних (82,3 против 74,1) случайной или статистически значимой, учитывая разброс значений внутри групп.

Расчет t-критерия Стьюдента производился по формуле:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}},$$

где

$\bar{x}_1$ – средний балл ЭГ, $\bar{x}_1 = 82,3$

$\bar{x}_2$ – средний балл КГ, $\bar{x}_2 = 74,1$

$s_1^2 = 139,24$

$s_2^2 = 153,76$

Подставляем полученные значения в формулу, получим

$$t = \frac{82,3 - 74,1}{\sqrt{\frac{139,24}{48} + \frac{153,76}{46}}} = \frac{8,2}{\sqrt{2,9 + 3,34}} = \frac{8,2}{\sqrt{6,24}} = \frac{8,2}{2,5} = 3,28$$

Число степеней свободы $df \approx 92$.

Критическое значение для уровня значимости $p = 0,05$ при $df \approx 92$ равно $t_{кр} = 1,986$. При этом эмпирическое значение составило $t_{экс} = 3,28$, что превышает критическое. Различия в средних баллах итоговой контрольной работы между экспериментальной и контрольной группами статистически значимы ($p < 0,05$). Это подтверждает, что разработанная методика использования неосократического диалога при обучении стереометрии действительно повышает качество овладения стереометрическим материалом.

Детальный анализ показал, где именно возникло основное различие. По закрытым задачам разница в среднем балле составила менее 3 баллов. По заданиям, требовавшим использования и модификации опорных конструкций, разрыв достигал 8-10 баллов. Учащиеся экспериментальной группы применяли опорные конструкции в 68% решений, в контрольной группе – в 41%. Ещё заметнее различие проявилось при переносе конструкций в новые ситуации. В задаче, где требовалось адаптировать конструкцию, отработанную на правильной четырёхугольной пирамиде, к условиям неправильной пирамиды, корректную модификацию предложили 52% учащихся экспериментальной группы и 23% контрольной. Эти данные свидетельствуют о том, что систематическая работа на этапе обобщения с использованием

неосократического диалога формирует более глубокое и гибкое владение стереометрическим материалом.

Качественный анализ процесса решения задач и записей диалогов выявил ещё одну особенность. Учащиеся экспериментальной группы чаще проявляли инициативу в постановке вопросов, более аргументированно строили устные математические рассуждения, воспринимали альтернативные рассуждения и проверяли их на непротиворечивость. Наблюдения за уроками показали, что в экспериментальной группе постепенно складывалась культура математической дискуссии. Участники диалога не стремились к немедленному получению правильного ответа, а сосредотачивались на обосновании гипотез и поиске возможных противоречий.

Опытно-экспериментальная работа позволила сформулировать ряд рекомендаций, выполнение которых может повысить результативность методики в школьной практике. При выборе задач для организации неосократического диалога целесообразно отбирать такие, в которых можно варьировать условие или требование, а также задачи, допускающие несколько вариантов ответов. Также систему вопросов учителю стоит готовить заранее, проектируя несколько возможных ветвей диалога в зависимости от предполагаемых ответов учащихся. В систему могут входить вопросы на уточнение, на проверку гипотез, на поиск контрпримеров и на обобщение. Стоит выстраивать фронтальное обсуждение и групповое исследование при организации взаимодействия, которые можно сочетать с последующей защитой позиции. Так как гипотез может быть несколько, то учителю стоит фиксировать их на доске. Наконец, завершать диалог целесообразно формулированием итогового вывода с выделением опорной конструкции и указанием новых связей между понятиями и способами действий. Полезны также итоговые вопросы о том, какой шаг в рассуждении был ключевым, какие альтернативы рассматривались, где возможны ошибки и каковы границы применимости полученного результата.

Итак, совокупность полученных количественных и качественных данных позволяет заключить, что выдвинутая гипотеза исследования нашла эмпирическое подтверждение. Установлено, что при работе с частично открытыми стереометрическими задачами использование несократического диалога на этапе систематизации и обобщения знаний обеспечивает значимо более высокий прирост исследуемых умений по сравнению с решением тех же задач без специальной организации диалога. Полученные результаты, зафиксированные в таблицах 5 и 6, свидетельствуют о том, что разработанная методика позволяет перевести значительную часть учащихся с низкого и среднего уровней на высокий уровень по всем пяти компонентам диагностики: исследовательскому, коммуникативному и предметному. При этом наиболее существенный прирост зафиксирован по таким показателям, как умение задавать содержательный математический вопрос, обнаруживать противоречие и модифицировать опорную конструкцию в новой ситуации – именно те умения, которые формировались через несократический диалог при решении частично открытых задач.

Таким образом, можно заключить, что использование разработанной методики применения несократического диалога при решении частично открытых стереометрических задач на этапе систематизации и обобщения знаний действительно способствует развитию у учащихся умений выдвигать гипотезу, задавать содержательный математический вопрос, обнаруживать противоречие в ходе решения, а также аргументированно строить устное математическое рассуждение и воспринимать иное рассуждение с проверкой на непротиворечивость. Кроме того, в экспериментальных группах отмечено повышение качества овладения стереометрическим материалом, выразившееся в увеличении количества учащихся, верно решивших стереометрические задачи, и в более активном использовании и модификации опорных конструкций.

Результаты опытно-экспериментальной работы могут быть полезны учителям математики, сотрудникам методических центров, а также

задействованы в программах повышения квалификации педагогических работников.

Итак, в параграфе решены следующие задачи:

1. Разработан диагностический инструментарий (задачи типов III, IV, V) для выявления уровней сформированности учебно-исследовательских и коммуникативных умений; констатирующий этап подтвердил однородность экспериментальных и контрольных групп ($t = 0,091$, $p > 0,05$).

2. Выявлены проблемы учащихся и учителей при проведении поискового этапа эксперимента связанные с организацией диалогового исследовательского обучения. В связи с чем были разработаны опорные карточки и конспекты уроков с вопросами. Эти материалы апробированы на международных и всероссийских конференциях (2025-2026 гг.).

3. На формирующем этапе в экспериментальной группе (48 человек) применялась разработанная методика с систематическим использованием несократического диалога. В контрольной группе (46 человек) использовались те же задачи, но без специальной организации диалога.

4. Результаты итоговой диагностики заметно разошлись. В экспериментальной группе доля учащихся с высоким уровнем выросла с 15% до 46%, а с низким снизилась с 33% до 10%. В контрольной группе изменения оказались значительно скромнее: с 17% до 22% и с 36% до 28% соответственно ($\chi^2 = 8,1$, $p < 0,05$). Средний балл итоговой контрольной работы в экспериментальной группе составил 82,3, в контрольной группе 74,1. Различие значимо ($t = 3,28$, $p < 0,05$). Основной вклад в это различие внесли задания, требовавшие использования и модификации опорных конструкций. По ним учащиеся экспериментальной группы показали 68% правильных решений. В контрольной группе этот показатель составил 41%. Ещё заметнее различие проявилось при переносе конструкций. С задачей на модификацию справились 52% учащихся экспериментальной группы и 23% учащихся контрольной группы.

5. Качественный анализ показал, что в экспериментальной группе постепенно сложилась культура математической дискуссии. Мы сформулировали практические рекомендации по применению методики. Отметим также необходимость развитой предметно-коммуникативной культуры учителя.

ВЫВОДЫ ПО II ГЛАВЕ

Во второй главе представлена методика использования неосократического диалога при обучении стереометрии учащихся классов с углублённым изучением математики.

Анализ учебников для углублённого уровня изучения стереометрии показал, что частично открытые задачи встречаются в разных темах и рубриках повышенной сложности, но не составляют целостной системы. С учётом типизации первой главы для неосократического диалога отобраны задачи трёх типов: III – явная многозначность условия, IV – неявная некорректность условия, V – неопределённость требования. Подготовлен набор по всем темам стереометрии с распределением задач по трём уровням сложности.

Работа по предложенной методике проходит пять шагов: от постановки задачи и выявления неопределённости к выдвижению и проверке гипотез, и затем к выводу. Для каждого шага определён соответствующий тип вопроса учителя. Описаны этапы урока общеметодологической направленности и две фазы работы с частично открытой задачей. В первой анализ условия приводит к созданию опорной конструкции; во второй, на заключительном этапе, конструкция варьируется для получения обобщения.

Методика реализована в теме «Углы в пространстве» на трёх сдвоенных уроках общеметодологической направленности. Обе фазы диалога показаны при решении задачи об угле между скрещивающимися прямыми в кубе. Последующее изменение вида многогранника использовано для выяснения границ применимости способа и формулирования общего вывода.

В рамках педагогического эксперимента методика показала свою эффективность, при том, что на констатирующем этапе подтверждена однородность экспериментальной и контрольной групп. В ходе поискового этапа разработаны опорные карточки для слабоуспевающих учащихся и конспекты уроков для учителей. На формирующем этапе в экспериментальных

группах применялась разработанная методика, в контрольных те же задачи решались без специальной организации диалога.

Итоговая диагностика показала, что в экспериментальной группе доля учащихся с высоким уровнем исследовательских умений возросла с 14% до 46%, с низким снизилась с 38% до 10%. В контрольных группах изменения были менее выражены. Различия статистически значимы. Средний балл итоговой контрольной работы в экспериментальных группах составил 82,3, в контрольных – 74,1. Учащиеся экспериментальных групп чаще использовали опорные конструкции и успешнее модифицировали их при переносе в новые ситуации.

Таким образом, экспериментальная проверка подтвердила гипотезу исследования. Разработанная методика способствует развитию учебно-исследовательских и коммуникативных умений учащихся, а также повышению качества овладения стереометрическим материалом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В классах с углублённым изучением математики диалог используется часто, но не всегда продуктивно. Ученики отвечают на вопросы учителя, но редко задают их сами. Между тем именно умение поставить вопрос лежит в основе учебного исследования. В работе требовалось найти диалоговые формы, подходящие для организации учебного исследования. Ниже описаны полученные результаты, соответствующие цели и задачам работы.

Анализ философских, психолого-педагогических и методических источников позволил сопоставить трактовки неосократического диалога. В рассмотренных интерпретациях (Л. Нельсон, М. Липман, А. А. Марголис, В. В. Рубцов и др.) преимущественное внимание уделяется развитию критического мышления и коммуникативных умений в гуманитарных дисциплинах. Применительно к обучению математике, особенно на углублённом уровне, данный вид диалога остаётся малоизученным. Показано, что диалоговые виды обучения обладают значительным потенциалом для активизации познавательной деятельности школьников. Вместе с тем методические разработки, адаптирующие неосократический диалог к стереометрическому содержанию и этапу систематизации и обобщения знаний, в настоящее время отсутствуют.

Уточнено содержание понятия «неосократический диалог». В настоящем исследовании он рассматривается как вид учебного диалога, в котором учитель занимает позицию сдержанного фасилитатора и организует сопоставление суждений, выдвигаемых самими учащимися. С помощью вопросов он фиксирует противоречия между этими суждениями и побуждает к проверке гипотез. Результатом такого обсуждения становится система обобщённого знания, зафиксированная учащимися на основе сопоставления собственных позиций. Применительно к обучению стереометрии неосократический диалог определён как вид учебного диалога, который начинается с общего неоднозначного вопроса, инициированного частично открытой

стереометрической задачей, и нацелен на развитие у учащихся умений самостоятельно анализировать геометрическую ситуацию, выдвигать и проверять гипотезы, выявлять противоречия между наглядностью и логикой. Результатом такого диалога становится обобщение имеющихся знаний через установление связей между ними и оформление этих связей в виде опорной стереометрической конструкции.

На основе классификации методов обучения И. Я. Лернера установлено соответствие видов учебного диалога и методов обучения. Проблемный диалог соответствует методу проблемного изложения. Эвристический диалог выступает ведущим видом взаимодействия в рамках частично-поискового метода. Неосократический диалог рассматривается как частный случай эвристического диалога и также относится к частично-поисковому методу. С опорой на четырёхуровневую модель исследовательского обучения Х. Банча и Б. Белла определено, что неосократический диалог может применяться на уровнях структурированного и направляемого исследования; в настоящей работе он проектируется на уровне направляемого исследования.

Учебно-исследовательская деятельность понимается вслед за И. В. Клещевой как познавательная активность, которую побуждает собственный интерес ученика и направляет осознанная цель. Она включает сбор и упорядочение данных, выдвижение предположения, его проверку и оформление вывода. Естественно, что учебно-исследовательские умения складываются именно в такой деятельности и являются её результатом.

Установлено, что на стереометрическом материале состав этих умений уточняется, так как ученик должен поставить не просто исследовательский вопрос, а содержательный математический вопрос о свойствах пространственной конфигурации, выдвинуть и проверить предположение о связях между её элементами, мысленно преобразовать чертёж, построить пространственную модель и выбрать метод решения. По степени самостоятельности нами различаются три уровня сформированности этих

умений: высокий, средний и низкий, что и оценивалось в рамках педагогического эксперимента.

Учебно-исследовательскую деятельность на математическом материале необходимо организовывать через такие задачи, в которых неопределённость заложена в условии, для облегчения формулирования первого неоднозначного вопроса. Поэтому мы рассмотрели понятие «частично открытая задача», которое встречается у П. М. Горева и В. В. Утёмова в исследованиях. Однако авторы чёткого определения не дают, а описывают такие задачи через примеры. В настоящем исследовании под частично открытой задачей понимается математическая задача, в которой элемент неопределённости присутствует не во всех, а лишь в отдельных компонентах структуры: условии, заключении, решении или базисе. При этом неопределённость может проявляться по-разному: недостаток или избыток данных, неоднозначная формулировка, наличие параметра, множественность ответов или способов решения. Такое понимание позволяет отличать частично открытые задачи от закрытых, где все компоненты определены, и от открытых, где неопределённость затрагивает всю структуру. На этой основе нами построена типизация частично открытых задач. В её основу положен характер учебного действия, которое выполняет ученик при работе с неопределённостью.

Проведено также разграничение частично открытой задачи со смежными понятиями и создан набор частично открытых задач разных типов, охватывающий все темы стереометрии. Набор структурирован по трём уровням сложности: начальный, основной и продвинутый для облегчения вхождения в диалог учащимся с недостаточно развитым пространственным мышлением.

Методика строится на использовании несократического диалога при работе с частично открытыми стереометрическими задачами и включает пять последовательных шагов: постановка задачи, выявление неопределённости, выдвижение гипотез, проверка гипотез, вывод. Каждому шагу соответствует свой тип вопроса учителя: уточняющий, направляющий, гипотетический,

критический, обобщающий. В соответствии с этим определена и логика этапов урока стереометрии общеметодологической направленности. В рамках методики работа с частично открытой задачей распадается на две фазы. Первая фаза связана с анализом условия: здесь выявляется неопределённость, выдвигаются и проверяются гипотезы, а завершается всё созданием опорной конструкции. Вторая фаза представляет собой новый виток диалога на заключительном этапе работы с задачей. В неё входят варьирование опорной конструкции, исследование изменения параметров условия или заключения, выявление инвариантных свойств и формулирование обобщения. Такое обобщение охватывает целый класс задачных ситуаций.

Также нами разработана схема организации неосократического диалога. Она отражает движение от исходной неопределённости через множественность гипотез к опорной конструкции, а затем к обобщению через варьирование.

Определены и требования к готовности учителя и учащихся для успешной реализации методики.

Практическая реализация методики проиллюстрирована на примере темы «Углы в пространстве». Разработана структура изучения темы, включающая три сдвоенных урока общеметодологической направленности: угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями. На примере задачи на нахождение угла между скрещивающимися прямыми в кубе продемонстрирована реализация двух фаз неосократического диалога. Показано, как варьирование опорной конструкции через изменение вида многогранника позволяет выявить границы поиска угла между скрещивающимися прямыми и сформулировать обобщение.

Проведён педагогический эксперимент, включавший констатирующий, поисковый и формирующий этапы. На констатирующем этапе выявлены основные трудности учащихся: недостаточное умение самостоятельно формулировать содержательные математические вопросы и неумение обнаруживать противоречия в ходе решения. Отмечена и неготовность части

учителей к организации такого диалога, связанная с отсутствием готовых конспектов и примеров. На формирующем этапе в экспериментальных группах реализовывалась разработанная методика, а в контрольных группах те же задачи решались без специальной организации диалога. Итоговая диагностика показала рост уровня исследовательских и коммуникативных умений в экспериментальной группе больший, чем в контрольной, что подтвердило гипотезу.

Таким образом, в ходе исследования решены все поставленные задачи. Разработанная методика использования несократического диалога при обучении стереометрии учащихся классов с углублённым изучением математики способствует развитию учебно-исследовательских умений (выдвижение гипотез, постановка содержательных математических вопросов, обнаружение противоречий в ходе решения задачи, обобщение и систематизация полученных данных, формулирование выводов) и коммуникативных умений (аргументированное построение устного математического рассуждения, восприятие иного рассуждения с проверкой на непротиворечивость), а также повышению качества овладения стереометрическим материалом.

Дальнейшее развитие исследования может быть связано с созданием наборов частично открытых задач для других разделов школьного курса математики, разработкой пропедевтики формирования исследовательских умений в основной школе, а также с включением несократического диалога в программы подготовки будущих учителей математики.

Библиографический список

1. Абрамкина О. Г. Учебный диалог как средство формирования коммуникативной культуры обучающихся : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.08 / О. Г. Абрамкина. – Орел, 2003. – 243 с.
2. Аганисян В. М. Учебный диалог как психологический фактор развития эвристического мышления обучающихся : автореф. дис. ... д-ра психол. наук : 19.00.07 / В. М. Аганисян. – Санкт-Петербург, 1999. – 36 с.
3. Александров А. Д. Геометрия : учебник для 10 класса школ с углубленным изучением математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – М. : Просвещение, 2021. – 271 с.
4. Александров А. Д. Геометрия : учебник для 11 класса школ с углубленным изучением математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – М. : Просвещение, 2021. – 272 с.
5. Александров А. Д. О геометрии / А. Д. Александров // Математика в школе. – 1980. – № 3. – С. 56–62.
6. Александров А. Д. Что же такое вектор / А. Д. Александров // Математика в школе. – 1984. – № 5. – С. 39–48.
7. Александров А. Д. Что такое многогранник / А. Д. Александров // Математика в школе. – 1981. – № 1. – С. 8–16.
8. Алексеева Е. В. Организация исследовательской деятельности учащихся 5-6 классов в процессе обучения математике : автореф. дис. ... канд. пед. наук / Е. В. Алексеева. – 2022.
9. Алымова Е. В. Сократический диалог как кайротический логос / Е. В. Алымова // Журнал Сибирского федерального университета. Гуманитарные науки. – 2020. – № 8. – С. 1283–1249.
10. Альгешкина, Т. П. От Магницкого – к ученику, от ученика – к открытию: наставничество через исследовательскую деятельность на уроках математики / Т. П. Альгешкина // Образование, инновации, исследования как

ресурс развития сообщества : материалы III Всероссийской научно-практической конференции. – Чебоксары : ИД «Среда», 2025. – С. 127-129.

11. Альтшуллер Г. С. Найти идею : введение в ТРИЗ – теорию решения изобретательских задач / Г. С. Альтшуллер. – 7-е изд. – М. : Альпина Пабlishер, 2014. – 401 с.

12. Альтшуллер Г. С. Поиск новых идей : от озарения к технологии : теория и практика решения изобретательских задач / Г. С. Альтшуллер, Б. Л. Злотин, А. В. Зусман, В. И. Филатов. – Кишинев : Картя молдовеняскэ, 1989. – 381 с.

13. Апполонова Н. В. Проблемный диалог на уроках математики: через общение к коммуникативным УУД / Н. В. Апполонова // Современные проблемы естественно-математического образования младших школьников в рамках реализации стандартов второго поколения : сб. науч. ст. / ЯГПУ им. К. Д. Ушинского ; под науч. ред. И. В. Налимовой, С. В. Жарова. – Ярославль, 2015. – С. 80–86.

14. Атанасян Л. С. Геометрия, 10–11 : учеб. для общеобразоват. учреждений (базовый и профильный уровни) / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев [и др.]. – 17-е изд. – М. : Просвещение, 2008. – 384 с.

15. Бабанский Ю. К. Избранные педагогические труды / Ю. К. Бабанский. – М. : Педагогика, 1989. – 558 с.

16. Бахтин М. М. Диалог I. Проблема диалогической речи / М. М. Бахтин // Собрание сочинений. Работы 1940-х – начала 1960-х годов. – М. : Рус. слово, 1996. – Т. 5. – 731 с.

17. Бахтин М. М. Проблемы поэтики Достоевского / М. М. Бахтин. – М. : Высшая школа, 1963. – 232 с.

18. Бахтин М. М. Эстетика словесного творчества / М. М. Бахтин. – М. : Искусство, 1986. – 445 с.

19. Белова С. В. Диалог – основа профессии педагога / С. В. Белова. – М. : АПКИПРО, 2002. – 148 с.

20. Березина Е. М. Технологии развития критического мышления и письма на примере метода «сократического диалога» / Е. М. Березина, Ю. В. Ветошкина, Е. С. Игнатова // Культура и цивилизация. – 2018. – Т. 8, № 5А. – С. 56–65.
21. Библер В. С. Школа диалога культур / В. С. Библер // Советская педагогика. – 1988. – № 11. – С. 29–34.
22. Богатырева И. Н. Обучение постановке вопросов на уроках математики / И. Н. Богатырева, Т. П. Полевикова // Математическое образование: современное состояние и перспективы : материалы Междунар. науч. конф. – Могилев, 2019. – С. 289–292.
23. Богданова В. О. Сократический диалог как образовательная практика развития субъектности / В. О. Богданова // Педагогическая наука и практика: актуальные вопросы, достижения и инновации : сб. ст. Междунар. науч.-практ. конф. – Пенза, 2024. – С. 19–22.
24. Болтянский В. Г. Как учить поиску решения задач / В. Г. Болтянский, Я. И. Груденов // Математика в школе. – 1988. – № 1. – С. 8–10.
25. Борисов С. В. Техника сократического диалога Оскара Бренифье / С. В. Борисов // Социум и власть. – 2019. – № 1. – С. 132–137.
26. Борков В. Ф. Культура диалога / В. Ф. Борков. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – 240 с.
27. Бочкарева Д. В. Об исследовательском подходе при обучении математике с использованием среды Geogebra / Д. В. Бочкарева, В. Р. Майер // Информатизация образования и методика электронного обучения: цифровые технологии в образовании : материалы VII Междунар. науч. конф. – Красноярск, 2023. – С. 729–732.
28. Будикина А. Е. «Открытые задачи» на уроках математики в 5-6 классах (на примере текстовых задач на движение) / А. Е. Будикина, С. М. Макарова // Аммосов-2021 : сб. материалов науч.-практ. конф. студентов СВФУ. – Якутск, 2021. – С. 263–266.

29. Бурдин М. В. Психологическое консультирование и психотерапия: технология сократического диалога : учеб. пособие / М. В. Бурдин, Е. С. Игнатова. – Пермь : Перм. гос. нац. исслед. ун-т, 2019. – 88 с.
30. Вернер А. Л. Простота и красота школьного курса геометрии А. Д. Александрова / А. Л. Вернер, Н. Л. Стефанова, М. В. Дзюба // Методика преподавания в современной школе: актуальные проблемы и инновационные решения : материалы Российско-узбекской науч.-метод. конф. – Ташкент, 2023. – С. 154–161.
31. Ветютнев Ю. Ю. Компетентностный подход в изучении и преподавании права: метод сократического диалога / Ю. Ю. Ветютнев, А. И. Макаров // Право и образование. – 2008. – № 7. – С. 97–103.
32. Викол Б. А. Формирование элементов исследовательской деятельности при углубленном изучении математики : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Б. А. Викол. – М., 1977. – 240 с.
33. Виноградова Н. Ф. Учебный диалог – эффективный метод развития младших школьников / Н. Ф. Виноградова // Начальное образование. – 2010. – № 1. – С. 49–52.
34. Выготский Л. С. Мышление и речь / Л. С. Выготский // Собрание сочинений. – М., 1982. – Т. 2. – 360 с.
35. Гилфорд Дж. П. Структура интеллекта / Дж. П. Гилфорд // Психология мышления : сборник переводов / под редакцией А. М. Матюшкина. – Москва : Прогресс, 1965. – С. 433–456.
36. Гин А. А. ТРИЗ-педагогика: учим креативно мыслить / А. А. Гин. – М. : Вита-Пресс, 2016. – 208 с.
37. Гин А. А. Теория открытых задач: проблематизация / А. А. Гин. – Москва : Вита-Пресс, 2021. – 112 с.
38. Гнатышина Е. А. Методологический потенциал сократического диалога как инновационного подхода к управлению проектами / Е. А. Гнатышина, О. Э. Иванова // АНИ: педагогика и психология. – 2017. – № 3 (20). – С. 59–62.

39. Гончарова М. А. Проблемное обучение на уроках математики / М. А. Гончарова, Р. Н. Решетникова // Школьные технологии. – 2013. – № 2. – С. 96–105.
40. Горев П. М. Открытые задачи в структуре современного креативного урока математики / П. М. Горев, О. В. Рычкова // Концепт. – 2015. – С. 1–8.
41. Губайдуллина М. С. Сократический метод и его использование в организации сократических семинаров / М. С. Губайдуллина, О. П. Черных // Манускрипт. – 2018. – № 10 (96). – С. 77–81.
42. Гусев В. А. Отдельные механизмы развития пространственного мышления учащихся / В. А. Гусев, А. В. Василенко // Совершенствование подготовки по математике и информатике в школе и вузе : [Сборник научных статей] / Моск. пед. гос. ун-т ; Под ред. Л. И. Боженковой и др. – М. : МПГУ, 2013. – С. 51-55.
43. Гусев В. А. Методика обучения геометрии : учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 032100 «Математика» / В. А. Гусев, В. В. Орлов, В. А. Панчишина [и др.] ; под редакцией В. А. Гусева. – Москва : Академия, 2004. – 366 с.
44. Гусева Е. В. Метод сократического диалога и его роль в преподавании дисциплин гуманитарного цикла / Е. В. Гусева // Социальные отношения. – 2019. – № 1 (28). – С. 20–29.
45. Давыдова С. В. Элементы технологии проблемного диалога при изучении математики / С. В. Давыдова // Наука и образование в XXI веке : сб. науч. тр. по материалам Междунар. науч.-практ. конф. – Тамбов, 2014. – Ч. 6. – С. 59–60.
46. Далингер В.А. Поисково-исследовательская деятельность учащихся по математике: Учебное пособие. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2005. – 456 с.
47. Демченкова Н. А. Эвристическая деятельность как средство реализации творческого потенциала учащихся / Н. А. Демченкова, И. В.

Антонова // Вектор науки Тольяттинского государственного университета. Серия: Педагогика, психология. – 2015. – № 3 (22). – С. 62–69.

48. Десницкая В. В. Формирование исследовательской компетентности учащихся на уроках математики в общеобразовательной школе / В. В. Десницкая // Инновационные проекты и программы в образовании. – 2013. – № 3. – С. 63–68.

49. Дзюба М. В. Исследовательские блуждания по стереометрической задаче / М. В. Дзюба, М. Р. Лапалайнен, С. А. Йазыджи // Физико-математическое образование в современном обществе : материалы Междунар. науч.-практ. конф. – Псков, 2023. – С. 63–69.

50. Дзюба М. В. Метод неосократического диалога в классах с углубленным изучением математики при решении задач по теме «Угол между скрещивающимися прямыми» / М. В. Дзюба // Современные проблемы математики и математического образования : LXXVII Герценовские чтения : сб. науч. тр. / под науч. ред. В. В. Орлова, М. Я. Якубсона. – СПб., 2024. – С. 118–123.

51. Диривянкина О. В. Становление, сущность эвристического обучения в педагогической науке и практике / О. В. Диривянкина // Вестник Санкт-Петербургского университета МВД России. – 2006. – № 4. – С. 406–413.

52. Дьюи Д. Психология и педагогика мышления / Д. Дьюи ; пер. с англ. Н. М. Никольской. – М. : Совершенство, 1997. – 208 с.

53. Егошина Н. Г. Технология сократического диалога как путь формирования универсальных компетенций студентов в процессе иноязычного образования / Н. Г. Егошина, Э. И. Иванов, А. И. Шорников // Наука и образование: новое время. – 2019. – № 5 (18). – С. 27–30.

54. Епишина Л. В. Диалоговые технологии – средство формирования коммуникативной компетенции / Л. В. Епишина // Начальная школа. – 2014. – № 1. – С. 66–67.

55. Епишина Л. В. Организация диалога Л. Н. Толстого с детьми в Яснополянской школе при обучении математике / Л. В. Епишина // Л. Н.

Толстой – мыслитель, художник, педагог и современность : материалы Междунар. науч. конф. – Орехово-Зуево, 2011. – С. 80.

56. Ерохина Л. Д. Сократический метод в преподавании философии в юридическом вузе / Л. Д. Ерохина // Роль юридических и социальных наук в развитии современного общества : сб. ст. по материалам Всерос. науч.-практ. конф. – Владивосток, 2023. – С. 360–363.

57. Жохов А. Л. Учебный диалог и учебные ситуации как средства включения учащихся в учебную деятельность при обучении математике / А. Л. Жохов, И. М. Хохлова // Математика и физика, экономика и технология и совершенствование их преподавания : материалы Междунар. конф. «Чтения Ушинского». – Ярославль, 2010. – Ч. II. – С. 43–54.

58. Зеленина Н. А. Заключительный этап решения геометрических задач в основной школе : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Н. А. Зеленина. – Киров, 2004. – 154 с.

59. Зыков И. С. Открытые задачи при обучении математике в средней школе // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2014. – Т. 16. – С. 6–10.

60. Иванова О. Э. Сократический диалог как обучение совместному решению проблем / О. Э. Иванова, Т. Г. Точилкина // АНИ: педагогика и психология. – 2017. – № 3 (20). – С. 59–64.

61. Изаак Д. Ф. Исследование задачи по геометрии / Д. Ф. Изаак // Математика. – 2000. – № 43. – С. 21–22.

62. Изаак Д. Ф. Поиски решения, исследование и обобщение задач по геометрии / Д. Ф. Изаак // Математика в школе. – 1998. – № 2. – С. 83–87.

63. Иржавцева В. П. Систематизация и обобщение знаний учащихся в процессе изучения математики : пособие для учителя / В. П. Иржавцева, Л. Я. Федченко ; под ред. Н. Л. Коломинского. – Киев : Радянська школа, 1988. – 205 с.

64. Каган М. С. О педагогическом аспекте теории диалога / М. С. Каган // Диалог в образовании : посвящено профессору А. П. Валицкой. – СПб., 2002. – С. 214–224.
65. Калинова Ю. А. Методика работы с геометрическими задачами с открытым концом / Ю. А. Калинова // Современные проблемы социально-гуманитарных наук. – 2016. – № 4 (6). – С. 5–11.
66. Калинова Ю. А. Система геометрических задач дивергентного типа как средство обучения учащихся основной школы анализу информации : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Ю. А. Калинова. – СПб., 2019. – 23 с.
67. Каминская М. В. Педагогический диалог в деятельности современного учителя / М. В. Каминская. – М. : Смысл, 2003. – 284 с.
68. Канин Е. С. Заключительный этап решения учебных задач / Е. С. Канин // Преподавание алгебры и геометрии в школе : пособие для учителей / сост. О. А. Боковнев. – М. : Просвещение, 1982. – С. 131–138.
69. Капкаева, Л. С. Формирование приемов эвристической деятельности у студентов среднего профессионального образования при обучении стереометрии / Л. С. Капкаева, К. М. Спиридонова // Мир науки. Педагогика и психология. – 2023. – Т. 11. – № 6. – С.
70. Кийко С. И. Опорные конфигурации в стереометрии и их использование при обучении решению задач : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / С. И. Кийко. – М., 1998. – 182 с.
71. Клепиков В. Н. К метапредметности через эвристическую конкретность / В. Н. Клепиков // Образование в современной школе. – 2012. – № 5. – С. 11–15.
72. Клепиков В. Н. Эвристические методы решения задач в современной школе / В. Н. Клепиков // Школьные технологии. – 2017. – № 3.
73. Клещева И. В. Организация опытно-экспериментальной работы школы по формированию учебно-исследовательской деятельности учащихся /

И. В. Клещева // Вестник Волжского университета им. В. Н. Татищева. – 2015. – № 2 (18). – С. 114–121.

74. Клещева И. В. Организация учебно-исследовательской деятельности учащихся при изучении математики : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / И. В. Клещева. – СПб., 2003. – 176 с.

75. Ковалева Г. И. Варьирование как метод построения систем задач по математике / Г. И. Ковалева // Ярославский педагогический вестник. – 2009. – № 4 (61). – С. 51–55.

76. Козловская Е. А. Роль эвристического диалога на уроках математики / Е. А. Козловская // Научно-методические основы формирования функциональной грамотности: теория и практика современной школы : сб. докл. II Всерос. науч.-практ. конф. – Коломна, 2024. – С. 102–107.

77. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике : в 2 ч. / Ю. М. Колягин. – М. : Просвещение, 1977. – Ч. 1. – 111 с.

78. Колягин Ю. М. Математика и развитие логического мышления / Ю. М. Колягин // Активизация обучения математике в сельской школе : сб. ст. / сост. Ю. М. Колягин. – М. : Просвещение, 1975. – С. 24–28.

79. Кондратьев А. С. Методы решения задач по физике : учебное пособие / А. С. Кондратьев, Л. А. Ларченкова, А. В. Ляпцев. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2019. – 320 с.

80. Кондратьев А. С. Современные технологии обучения физике : учебное пособие / А. С. Кондратьев, Н. А. Прияткин. – Санкт-Петербург : Издательство Санкт-Петербургского университета, 2006. – 342 с.

81. Король А. Д. Эвристическое обучение на основе вопрошания и молчания ученика: от методологии к практике : монография / А. Д. Король. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2023. – 196 с.

82. Коротаева Е. В. Учебный диалог: технология или искусство? / Е. В. Коротаева // Русский язык в школе. – 2008. – № 4. – С. 22–26.

83. Курганов С. Ю. Ребенок и взрослый в учебном диалоге : кн. для учителя / С. Ю. Курганов. – М. : Просвещение, 1989. – 126 с.

84. Кучинский Г. М. Диалог в процессе совместного решения мыслительных задач / Г. М. Кучинский. – М., 1981. – 120 с.
85. Кучинский Г. М. Диалог и мышление / Г. М. Кучинский. – Минск : Изд-во БГУ, 1983. – 190 с.
86. Ларькина Е. В. Методика формирования элементов исследовательской деятельности учащихся основной школы на уроках геометрии : автореф. дис. ... канд. пед. наук / Е. В. Ларькина. – М., 1996. – 16 с.
87. Леонтович А. В. К проблеме развития исследований в науке и образовании // Исследовательская работа школьников. 2010. № 1. С. 5–12.
88. Лернер И. Я. Дидактические основы методов обучения / И. Я. Лернер. – М. : Педагогика, 1981. – 185 с.
89. Липатникова И. Г. Эвристическая математическая задача как средство формирования когнитивной компетентности / И. Г. Липатникова, Т. Ю. Паршина // Фундаментальные исследования. – 2012. – № 9-1. – С. 98–102.
90. Майкова Н. С. Провоцирующие задачи как средство предупреждения ошибок учащихся при обучении геометрии : на материале курса геометрии 7–9 классов : диссертация ... кандидата педагогических наук : 13.00.02 / Майкова Наталья Сергеевна. – Санкт-Петербург, 2009. – 180 с.
91. Макарова М. И. Формирование коммуникативных универсальных учебных действий при обучении математике / М. И. Макарова // Флагман науки. – 2024. – № 2 (13). – С. 167–169.
92. Мамлеева А. Ф. Развитие нравственно-ценностных ориентаций обучающихся посредством сократического диалога / А. Ф. Мамлеева // Актуальные проблемы гуманитарных и социально-экономических наук. – 2022. – Т. 5, № S(91). – С. 36–41.
93. Марголис А. А. Новый учебный предмет «Философия для детей» / А. А. Марголис // Психологическая наука и образование. – 1996. – № 1. – С. 64–72.

94. Маркушевич А. И. Математика и воспитание мышления / А. И. Маркушевич // Математическое образование сегодня. – М. : Знание, 1974. – № 6.
95. Матюшкин А. М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении / А. М. Матюшкин. – М. : Педагогика, 1972. – 208 с.
96. Махмутов М. И. Проблемное обучение. Основные вопросы теории / М. И. Махмутов. – М. : Педагогика, 1975. – 368 с.
97. Машбиц Е. И. Диалог в обучающей системе / Е. И. Машбиц, В. В. Андриевская, Е. Ю. Комисарова ; под общ. ред. А. А. Стогния. – Киев : Выща шк., 1989. – С. 21.
98. Медведев А. Д. Метод Сократа в школе / А. Д. Медведев // Грани познания. – 2020. – № 3 (68). – С. 54–58.
99. Мельникова Е. Л. Проблемно-диалогическое обучение: понятие, технология, методика / Е. Л. Мельникова. – М. : Баласс, 2015. – 266 с.
100. Мельникова Е. Л. Проблемный урок, или Как открывать знания с учениками : пособие для учителя / Е. Л. Мельникова. – 2-е изд., стер. – М. : АПК и ПРО, 2006. – 168 с.
101. Мельникова Е. Л. Технология проблемного диалога: постановка учебной проблемы / Е. Л. Мельникова // Русский язык в школе. – 2016. – № 5. – С. 25–30.
102. Меньшикова Н. А. Учебно-исследовательская математическая деятельность в средней школе как фактор приобщения к будущей научной работе : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Н. А. Меньшикова. – Ярославль, 2003. – 176 с.
103. Мерзляк А. Г. Геометрия. 10 класс. Углубленный уровень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. М. Поляков. – 2-е изд., стер. – М. : Вентана-Граф, 2019. – 272 с.
104. Микушева Н. П. Задачи «на многозначность» как средство развития рефлексии учащихся при обучении геометрии : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Н. П. Микушева. – СПб., 2006. – 23 с.

105. Митрош О. И. Формирование исследовательских умений у учащихся педагогических училищ : дис. ... канд. пед. наук / О. И. Митрош. – Минск, 1993. – 195 с.
106. Мугаллимова С. Р. Анализ некоторых понятий педагогической эвристики / С. Р. Мугаллимова // Вестник Сургутского государственного педагогического университета. – 2010. – № 1.
107. Мугаллимова С. Р. Эвристическая деятельность и эвристические приемы в процессе решения проблемы / С. Р. Мугаллимова // Исследовательский подход в образовании: от теории к практике : науч.-метод. сб. / под общ. ред. А. С. Обухова. – М., 2009. – С. 249–256.
108. Насикан И. В. Метод варьирования в системе задач на развитие функциональных умений учащихся основной школы / И. В. Насикан // Проблемы теории и практики обучения математике : сб. науч. работ. – СПб., 2012. – С. 236- 240.
109. Нельсон Л. Метод Сократа : лекция / Л. Нельсон. – Франция : Общественная жизнь, 1929. – С. 21–78.
110. Носова К. Д. Приемы формирования математической грамотности на основе эвристического диалога при обучении поиску решения задач / К. Д. Носова, О. Н. Пирютко // Физико-математическое образование: традиции, инновации, перспективы : материалы Междунар. науч.-практ. конф. – Минск, 2023. – С. 64–67.
111. Носова К. Д. Эвристический диалог как средство формирования функциональной грамотности при обучении математике в учреждениях общего среднего образования / К. Д. Носова // Диверсификация педагогического образования в условиях развития информационного общества : материалы III Междунар. науч.-практ. конф. – Минск, 2024. – С. 325–331.
112. Обухов А. С. Исследовательская позиция личности // Исследовательская работа школьников. 2006. № 1. С. 61–69.

113. Овсянникова И. С. Открытые задачи / И. С. Овсянникова // Наука и школа. – 2014. – С. 30–36.
114. Оглуздина А. В. Использование технологии проблемного диалога на уроках математики как средство формирования познавательных универсальных учебных действий / А. В. Оглуздина // Проблемы фундаментальной подготовки в школе и вузе в контексте современности : межвуз. сб. науч. работ. – Череповец, 2018. – Вып. 8. – С. 159–162.
115. Огурцова О. К. Возможности применения эвристических методов при обучении математике в средней школе / О. К. Огурцова // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – Киров, 2009. – Вып. 11. – С. 312–317.
116. Ожегов С. И. Толковый словарь русского языка / С. И. Ожегов, Н. Ю. Шведова. – 4-е изд., доп. – М. : Азбуковник, 1997. – 944 с.
117. Окунев А. А. Углубленное изучение геометрии в 8 классе : пособие для учителя / А. А. Окунев. – М. : Просвещение, 1996. – 175 с.
118. Ольбинский И. Б. Методика обучения учащихся старших классов рефлексивному исследованию математических задач : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / И. Б. Ольбинский. – М., 2002. – 222 с.
119. Орлов В. В. Методика обучения математике. Практикум : учебник для вузов / В. В. Орлов, В. И. Снегурова, Н. С. Подходова, В. В. Крылов [и др.] ; под редакцией В. В. Орлова, В. И. Снегуровой. – Москва : Юрайт, 2026. – 379 с.
120. Орлов В. В. Организация самостоятельного поиска решения стереометрических задач с помощью опорных конструкций : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / В. В. Орлов. – Л., 1990. – 170 с.
121. Орлов В. В. Построение основного курса геометрии общеобразовательной школы в концепции личностно ориентированного обучения : дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.02 / Орлов В. В. – Санкт-Петербург : РГПУ им. А. И. Герцена, 2000. – 384 с.

122. Осмоловская И. М. Организация дифференцированного обучения в современной общеобразовательной школе / И. М. Осмоловская. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Изд-во Моск. психол.-соц. ин-та ; Воронеж : МОДЭК, 2005. – 214 с.
123. Ощепков И. В. Поздняя диалектика Платона. Общая характеристика / И. В. Ощепков // Вопросы философии. – 2016. – № 1. – С. 105–118.
124. Павленко С. А. Особенности организации исследовательской деятельности при обучении математике / С. А. Павленко // Актуальные вопросы общества, науки и образования : сб. ст. XVII Междунар. науч.-практ. конф. – Пенза, 2024. – С. 167–168.
125. Павлова И. С. Метод вопрошания в системе современного урока / И. С. Павлова, Е. П. Вдовин // Математическое и информационное моделирование : материалы Всерос. конф. молодых ученых. – Тюмень, 2024. – С. 406–414.
126. Павлова М. А. Исследовательское обучение математике учащихся основной школы во внеурочное время с использованием системы динамической геометрии : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / М. А. Павлова. – Елец, 2018. – 207 с.
127. Павлова М. А. Сократовский диалог как метод исследовательского обучения экспериментальной математике на занятиях кружка / М. А. Павлова, М. В. Шабанова // Ярославский педагогический вестник. – 2015. – № 5. – С. 80–85.
128. Песняева Н. А. Формирование универсальных учебных действий в учебном диалоге / Н. А. Песняева // Управление начальной школой. – 2010. – № 7. – С. 15–22.
129. Пиаже, Ж. Речь и мышление ребенка / Ж. Пиаже ; пер. с фр. под ред. В. А. Лукова. – СПб. : Союз, 1997. – 392 с.
130. Платон. Избранные диалоги / Платон. – М. : Худож. лит., 1965. – 441 с.

131. Погодина О. А. Сократический диалог как средство образовательного взаимодействия с ребенком / О. А. Погодина, О. Б. Васильева // Педагогическое образование и наука. – 2020. – № 2. – С. 64–68.
132. Подходова Н. С. Методика обучения математике : учебник для вузов / Н. С. Подходова, В. В. Орлов, Н. Л. Стефанова, И. А. Иванов ; под редакцией Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой. – Москва : Юрайт, 2026. – 566 с.
133. Позняков В. В. Диалог как деятельность / В. В. Позняков // Чалавек, грамадства, свет. – 2004. – № 1. – С. 31–47.
134. Пойа Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание / Д. Пойа. – М. : Наука, 1970. – 448 с.
135. Полякова М. В. Проект «Круг Сократа» или как научиться вести сократовскую беседу / М. В. Полякова // Заметки ученого. – 2015. – Т. 1, № 1–1 (1). – С. 92–103.
136. Потоскуев Е. В. Геометрия. 10 класс. Углубленный уровень : задачник / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. – 2-е изд., стер. – М. : Дрофа, 2014. – 255 с.
137. Пургина Е. И. Сократический диалог: историко-философский аспект и дидактический потенциал в современном образовании / Е. И. Пургина // Человеческий капитал. – 2025. – № 2 (194). – С. 101–109.
138. Реньи А. Диалоги о математике / А. Реньи ; пер. с англ. Д. Б. Гнеденко, Е. А. Масловой ; под ред. Б. В. Гнеденко. – М. : Мир, 1969. – 96 с.
139. Ретюнских Л. Т. Школа Сократа: Философские игры десять лет спустя : учеб.-метод. пособие / Л. Т. Ретюнских. – М. : Изд-во Моск. психол.-соц. ин-та ; Воронеж : МОДЭК, 2003. – 205 с.
140. Роганова И. А. Использование вариаций математических задач на уроках геометрии / И. А. Роганова // Colloquium-journal. – 2019. – № 1–8 (25). – С. 100–103.
141. Рубинштейн С. Л. О мышлении и путях его исследования / С. Л. Рубинштейн. – М. : Изд-во Акад. наук СССР, 1958. – 147 с.

142. Рубцов В. В. Психологическое исследование генеза и развития житейских понятий в условиях учебного диалога (первый этап) / В. В. Рубцов, А. А. Марголис, М. В. Телегин // Психологическая наука и образование. – 2007. – № 2. – С. 61–72.
143. Рубцов В. В. Психологическое исследование генеза и развития житейских понятий в условиях учебного диалога (второй этап) / В. В. Рубцов, А. А. Марголис, М. В. Телегин // Психологическая наука и образование. – 2008. – № 2. – С. 61–69.
144. Рябова М. С. Вопросно-ответные процедуры в процессе обучения математике учащихся гуманитарных классов как средство их интеллектуального и творческого развития : диссертация ... кандидата педагогических наук : 13.00.02 / Рябова Марина Сергеевна. – Красноярск, 2005. – 194 с.
145. Савенков А. И. Педагогика: исследовательский подход : учебник и практикум для вузов : в 2 частях / А. И. Савенков. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Юрайт, 2020–2024. – (Высшее образование).
146. Савилов В. Б. Когнитивный тренинг с применением технологии сократического диалога для развития мышления и регуляторных функций при легком нейрокогнитивном расстройстве (по программе реабилитации «Клиники памяти») : методические рекомендации / В. Б. Савилов, А. В. Андрющенко, Ю. Ю. Ветютнев [и др.]. – М. : ГБУЗ «ПКБ № 1» ДЗМ, 2024. – 61 с.
147. Самарский А. А. Неизбежность новой методологии // Коммунист. – 1989. – № 1. – С. 84-92.
148. Саранцев, Г. И. Методика обучения математике в средней школе : учеб. пособие для студентов мат. специальностей пед. вузов и ун-тов / Г. И. Саранцев. – Москва : Просвещение, 2002. – 223 с.
149. Саранцев Г. И. Обучение математическим доказательствам и опровержениям в школе / Г. И. Саранцев. – М. : ВЛАДОС, 2005. – 183 с.

150. Саранцев Г. И. Эвристики в школьном курсе геометрии / Г. И. Саранцев // Математика в школе. – 2008. – № 4. – С. 28–34.
151. Сафуанов И. С. Открытый подход к обучению математике / И. С. Сафуанов // Университеты в системе поиска и поддержки математически одаренных детей и молодежи : материалы I Всерос. науч.-практ. конф. – 2015. – С. 126–130.
152. Селюцкий А. Б. Вдохновение по заказу: уроки изобретательства / А. Б. Селюцкий, Г. И. Слугин. – Петрозаводск : Карелия, 1977. – 192 с.
153. Семенов Е. Е. Лекция по математике как диалог / Е. Е. Семенов // Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам : материалы Междунар. науч.-практ. Интернет-конф. – Витебск, 2011. – С. 157–158.
154. Семенов Е. Е. Методология диалогического познания математики / Е. Е. Семенов // Матэматыка: праблемы выкладання. – 2009. – № 1 (60). – С. 3–6.
155. Семенов Е.Е. Размышления об эвристиках / Е. Е. Семенов // Математика в школе. – 1995. – № 5. – С. 39–43.
156. Сиденко А. С. Рефлексивный педагогический диалог / А. С. Сиденко // Школьные технологии. – 1999. – № 1–2. – С. 165–170.
157. Симонова Н. С. Метод Сократа в обучении / Н. С. Симонова // Подготовка кадров для силовых структур: современные направления и образовательные технологии : материалы XIX Всерос. науч.-метод. конф. – 2014. – С. 142–144.
158. Скаткин М. Н. Проблемы современной дидактики / М. Н. Скаткин. – 2-е изд. – М. : Педагогика, 1984. – 96 с.
159. Скафа Е. И. Перспективные технологии эвристического обучения математике / Е. И. Скафа // ДМ. – 2005. – № 24.
160. Скафа Е. И. Система подготовки нового поколения учителей математики на основе проектно-эвристической деятельности / Е. И. Скафа, Е. Г. Евсеева, Ю. В. Абраменкова, И. В. Гончарова // ПНиО. – 2021. – № 5 (53).

161. Скафа Е. И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология : монография / Е. И. Скафа. – Донецк : ДонНУ, 2004. – 439 с.
162. Скворцова О. Г. Применение проблемного диалога на уроках математики / О. Г. Скворцова // XIII международные Плехановские чтения : материалы Междунар. науч.-практ. конф. – Улан-Батор, 2017. – С. 43–46.
163. Сложеникина Ю. В. Сократический диалог как учебный метод: Сергей Эйзенштейн / Ю. В. Сложеникина, И. И. Пеньковская // Диалог со временем. – 2025. – № 90. – С. 325–341.
164. Смирнова А. А. Метод варьирования текстовых задач по математике как средство повышения качества знаний учащихся : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / А. А. Смирнова. – СПб., 2007. – 165 с.
165. Соколов В. Н. Педагогическая эвристика. Введение в теорию и методику эвристической деятельности / В. Н. Соколов. – М. : Аспект Пресс, 1995. – 255 с.
166. Сольшко А. А. Проектирование эвристических уроков по математике / А. А. Сольшко // 76-я научная конференция студентов и аспирантов Белорусского государственного университета : материалы конф. – Минск, 2019. – Ч. 3. – С. 442–445.
167. Стефанова Н. Л. Проблема развития исследовательских умений учащихся с позиции метаметодического подхода / Н. Стефанова // Известия Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена. – 2002. – № 3. – С. 167–175.
168. Столяр А. А. Педагогика математики : учеб. пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов / А. А. Столяр. – Минск : Вышэйшая школа, 1986. – 414 с.
169. Таранова, М. В. Учебно-исследовательская деятельность как фактор повышения эффективности обучения математике учащихся профильных классов : диссертация ... кандидата педагогических наук : 13.00.02 / Таранова Марина Владимировна. – Новосибирск, 2003. – 190 с.

170. Телегин М. В. Воспитательный диалог: образовательная программа для детей старшего дошкольного возраста / М. В. Телегин. – М. : МГППУ, 2004. – 288 с.
171. Телегин М. В. Рождение диалога: книга о педагогическом общении / М. В. Телегин. – М. : АЛВИАН, 2009. – 222 с.
172. Телегин М. В. Теория и практика диалогического воспитания детей старшего дошкольного и младшего школьного возраста / М. В. Телегин. – М. : МГППУ, 2006. – 272 с.
173. Тимофеева Л. Н. Развитие исследовательских умений учащихся классов с углубленным изучением математики : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Л. Н. Тимофеева. – СПб., 2003. – 19 с.
174. Токунова Н. В. Варьирование как метод составления и решения математических задач / Н. В. Токунова // Проблемы теории и практики обучения математике : сб. науч. работ. – СПб., 2013. – С. 303–307.
175. Толстой Л. Н. Педагогические сочинения / Л. Н. Толстой. – М. : Педагогика, 1989. – 542 с.
176. Тылик А. Ю. Дидактические принципы программы «Философия для детей» (М. Липман) в свете концепции универсальных компетентностей / А. Ю. Тылик // Педагогика. Вопросы теории и практики. – 2020. – Т. 5, вып. 1. – С. 55–59.
177. Ульянова И. В. Роль математических задач в обучении учащихся эвристикам / И. В. Ульянова // Наука и школа. – 2019. – № 4. – С. 135–144.
178. Успенский В. В. Школьные исследовательские задачи и их место в учебном процессе : автореф. дис. ... канд. пед. наук / В. В. Успенский. – М., 1967. – 19 с.
179. Утёмов, В. В. Развитие креативности учащихся основной школы посредством решения задач “открытого” типа : дис. ... канд. пед. наук / В. В. Утёмов. – Киров, 2012. – 197 с.

180. Утёмов В. В. Технология формирования креативности на основе задач открытого типа / В. В. Утёмов // Образование. Наука. Научные кадры. – 2011. – № 2. – С. 204–209.
181. Ушаков, А. А. Развитие исследовательской компетентности учащихся общеобразовательной школы в условиях профильного обучения : диссертация ... кандидата педагогических наук : 13.00.01 / Ушаков Алексей Антонинович. – Майкоп, 2008. – 190 с.
182. Ушинский К. Д. Человек как предмет воспитания: опыт педагогической антропологии / К. Д. Ушинский. – Москва : Фаир-Пресс, 2004. – 576 с. – (Классика педагогики).
183. Фалилеева, М. В. Проектная и исследовательская деятельность как средство формирования универсальных учебных действий учащихся при обучении математике : диссертация ... кандидата педагогических наук : 5.8.2 / Фалилеева Мария Валерьевна. – Нижний Новгород, 2023. – 220 с.
184. Фаритов А. Т. Диалоговое взаимодействие учащихся на уроке математики / А. Т. Фаритов // Школьные технологии. – 2018. – № 1. – С. 41–45.
185. Федоров Б. И. Аргументация в учебном диалоге / Б. И. Федоров // Мысль : журнал Петербургского философского общества. – 2006. – Т. 6, № 1. – С. 175–186.
186. Фёдорова Е. Е. Ценностный аспект диалога в философии Сократа и софистов / Е. Е. Фёдорова // Вестник науки и образования. – 2019. – № 5 (59). – С. 31–34.
187. Федченко Л. Я. Методика организации обобщения и систематизации знаний и умений учащихся при обучении математике : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Л. Я. Федченко. – Киев, 1998.
188. Фохт Б. А. Педагогические идеи Сократа / Б. А. Фохт // Дидакт. – 1998. – № 1 (22). – С. 60–64.

189. Фридман Л. М. Теоретические основы методики обучения математике : пособие для учителей, методистов и педагогических вузов / Л. М. Фридман. – М. : МПСИ : Флинта, 1998. – 224 с.
190. Фролова М. В. Использование метода неосократического диалога как способа формирования критического мышления при обучении стереометрии учащихся специализированных классов / М. В. Фролова // Современные проблемы математики и математического образования : сб. науч. ст. Междунар. науч. конф. – СПб., 2022. – С. 113–118.
191. Фролова М. В. Метод кругов Сократа на уроке стереометрии с учащимися классов с углубленным изучением математики / М. В. Фролова // Эвристика и дидактика математики : материалы XII Междунар. науч.-метод. дистанционной конф.-конкурса. – Донецк, 2023. – С. 83–85.
192. Фролова М. В. Сократический диалог как способ формирования навыков рассуждения на уроках стереометрии в классах с углубленным изучением математики / М. В. Фролова // Классическая и современная геометрия : материалы Междунар. конф. – М., 2021. – С. 149–150.
193. Хуторской А. В. Дидактическая эвристика: Теория и технология креативного обучения / А. В. Хуторской. – М. : Изд-во МГУ, 2003. – 415 с.
194. Хуторской А. В. Методология инновационной практики в образовании : монография / А. В. Хуторской. – М. : Ридеро, 2021. – 162 с.
195. Цедрик Е. В. Использование технологии проблемного диалога на уроках математики / Е. В. Цедрик // Научный альманах. – 2020. – № 12–1 (74). – С. 163–165.
196. Шикова Л. Р. Исследовательская деятельность школьников в процессе решения геометрических задач / Л. Р. Шикова // Математика в школе. – 1995. – № 4. – С. 13–17.
197. Шулаева Н. А. Классификация открытых задач / Н. А. Шулаева, И. Б. Костина, Ю. П. Гладких // Наука. Образование. Инновации : сб. науч. тр. по материалам XIV Междунар. науч. конф. – Анапа, 2020. – С. 85–91.

198. Щепин О. Н. Наглядно-конструктивный подход к изучению стереометрии в старших классах средней школы : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / О. Н. Щепин. – М., 1998. – 115 с.

199. Юдина Н. А. Обучение учащихся аналогии на заключительном этапе решения планиметрических задач / Н. А. Юдина // Альманах современной науки и образования. – 2011. – № 10 (53). – С. 187–191.

200. Якиманская И. С. Развитие пространственного мышления школьников. – М.: Педагогика, 1980. – 240 с.

201. Ястребов А. В. Обучение математике в вузе как модель научных исследований : монография / А. В. Ястребов. – М. : МЦНМО, 2023. – 335 с.

202. Ястребов А. В. Моделирование научных исследований как средство оптимизации обучения студента педагогического вуза : автореф. дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.08 / А. В. Ястребов. – Ярославль, 1997. – 35 с.

203. Ященко, И. В. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2025 года по математике / И. В. Ященко, И. Р. Высоцкий, П. И. Самсонов, А. В. Семенов. – Москва : ФГБНУ «ФИПИ», 2025.

Иностранные источники

204. Banchi, H. The many levels of inquiry / H. Banchi, R. Bell // Science and Children. – 2008. – Vol. 46, No. 2. – P. 26–29.

205. Boghossian P. The Socratic Method (or, Having a Right to Get Stoned) / P. Boghossian. – Paper presented at the International History, Philosophy and Science Teaching conference. – Denver, Colorado, November 7–11, 2001.

206. Boghossian P. Socratic Pedagogy, Critical Thinking, Moral Reasoning and Inmate Education: an Exploratory Study : Ed.D. Thesis / P. Boghossian. – Portland State University, 2004. – 230 p.

207. Brosow F. Philosophizing as an Educational Process – How to Initiate Profound Discussions Using the TRAP-Mind-Theory / F. Brosow // 12th annual International Conference of Education, Research and Innovation. – Seville, Spain, 2019. – P. 4039–4043.

208. Carey T. A. What is Socratic questioning? / T. A. Carey, R. J. Mullan // *Psychotherapy: Theory, Research, Practice, Training*. – 2004. – Vol. 41, No. 3. – P. 217–226.
209. Copeland M. Socratic Circles: Fostering Critical and Creative Thinking in Middle and High School / M. Copeland. – Portland, ME : Stenhouse Publishers, 2005. – 173 p.
210. Gronke H. Socratic Coaching in Business and Management Consulting Practice / H. Gronke, J. Haubner // *Practical Philosophy*. – 2006. – Vol. 8, Issue 1. – P. 28–38.
211. Guilford J. P. The Nature of Human Intelligence / J. P. Guilford. – New York : McGraw-Hill, 1967. – 538 p.
212. Heckmann G. Socratic dialogue / G. Heckmann // *Thinking: The Journal of Philosophy for Children*. – 1988. – Vol. 8, No. 1. – P. 34-37.
213. Heckmann, G.; Krohn, D.: Über den Sokratischen Dialog und die Sokratischen Arbeitswochen. In: *Zeitschrift für Didaktik der Philosophie*. Hannover, 1988. Nr. 1. S. 38-43.
214. Ho Y. R. Thinking more wisely: using the Socratic method to develop critical thinking skills amongst healthcare students / Y. R. Ho, B. Y. Chen, C. M. Li // *BMC Medical Education*. – 2023. – Vol. 23, no. 1.
215. Kennerley H. Socratic method / H. Kennerley // *OCTC essential guides*. – 2007.
216. Kessels J. The Socratic dialogue as a method of organization learning / J. Kessels // *Dialogue and Universalism*. – 1996. – V (5–6). – P. 53–67.
217. Lipman M. Thinking in education / M. Lipman. – Cambridge : Cambridge University Press, 2001. – 316 p.
218. Mahoney B. B. Learning to think critically through Socratic dialogue: Evaluating a series of lessons designed for secondary vocational education / B. B. Mahoney, R. R. Oostdam, H. H. Nieuwelink, J. J. Schuitema // *Thinking Skills and Creativity*. – 2023. – Vol. 50.

219. Moeller V. J. Socratic Seminars and Literature Circles / V. J. Moeller, M. V. Moeller. – New York ; London : Routledge, 2002.

220. Nelson L. Die sokratische Methode. Vortrag, gehalten am 11. Dezember 1922 in der Pädagogischen Gesellschaft in Göttingen / L. Nelson // Abhandlungen der Fries'schen Schule. Neue Folge. – Hrsg. von O. Meyerhof, F. Oppenheimer, M. Specht. – Göttingen : Öffentliches Leben, 1929. – Bd. 5, H. 1. – S. 21–78.

221. Overholser J. C. Elements of the Socratic method: II. Inductive reasoning / J. C. Overholser // Psychotherapy. – 1993. – Vol. 30. – P. 75–85.

222. Padesky Ch. A. Socratic Questioning: Changing Minds or Guiding Discovery? / Ch. A. Padesky. – Center for Cognitive Therapy, Huntington Beach, California, 1993.

223. Paul R. The thinker's guide to socratic questioning : based on critical thinking concepts and tools / R. Paul, L. Elder. – [S.l.] : Rowman & Littlefield Publishers, 2019. – 1 online resource (103 p.). – (Thinker's Guide Library).

224. RaupachStrey, G. Sokratische Didaktik: die didaktische Bedeutung der Sokratischen Methode in der Tradition von Leonard Nelson und Gustav Heckmann. 2. Aufl. Münster: LIT Verlag, 2012. (Sokratisches Philosophieren, Bd. 10).

225. Rutter J. G. Guidelines for the effective use of Socratic dialogue in cognitive therapy / J. G. Rutter, R. D. Friedberg. – 1999.

226. Tredway L. Socratic Seminars: Engaging Students in Intellectual Discourse / L. Tredway // Educational Leadership. – 1995. – Vol. 53, No. 1.

227. Vlastos G. Socratic Studies / G. Vlastos. – Cambridge : Cambridge University Press, 1994. – 155 p.

Нормативные правовые акты, стандарты, официальные документы

228. ГОСТ Р 7.0.11–2011. Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Диссертация и автореферат диссертации. Структура и правила оформления. – Введ. 2011–12–13. – М. : Стандартинформ, 2012. – 15 с.

229. Концепция развития математического образования в Российской Федерации : [утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р]. –Москва, 2013. –15 с.

230. Приказ Министерства образования и науки РФ от 22 февраля 2018 г. № 121. Об утверждении Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 44.03.01 педагогическое образование : в ред. от 08.02.2021 № 1456.

231. Приказ Министерства образования и науки РФ от 22 февраля 2018 г. № 126. Об утверждении Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – магистратура по направлению подготовки 44.04.01 педагогическое образование.

232. Распоряжение Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р Об утверждении концепции развития математического образования в Российской Федерации.

233. Распоряжение Правительства Российской Федерации от 19 ноября 2024 г. № 3333-р. Об утверждении Комплексного плана мероприятий по повышению качества математического и естественно-научного образования на период до 2030 года.

**НАБОР частично открытых задач разных типов
для реализации методики использования неосократического диалога**

ТЕМА: ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ

Задача 1 с прямоугольным параллелепипедом на параллельность прямой и плоскости (ТИП III)

Рёбра прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ имеют длины $AB = 4$, $AD = 3$ и $AA_1 = 5$. Точка M выбрана на BB_1 так, что $BM : MB_1 = 1 : 2$. Секущая плоскость α содержит M , параллельна диагонали AC основания и пересекает DD_1 . Требуется определить периметр и площадь полученного сечения.

**Методические рекомендации по работе с задачей в рамках методики
использования неосократического диалога**

1. Постановка задачи (общий неоднозначный вопрос)

Учитель начинает диалог с вопроса, который побуждает учащихся самостоятельно обнаружить неопределённость, заложенную в условии: «Как вы думаете, какой фигурой является сечение параллелепипеда плоскостью α ?»

Учащиеся выдвигают первичные гипотезы о возможной форме сечения (треугольник, четырёхугольник). Гипотезы фиксируются на доске в виде эскизов.

2. Выявление неопределённости (уточняющие вопросы)

Учитель направляет внимание учащихся на осознание скрытой неоднозначности условия: «Что в условии задачи является определённым? Какие элементы фигуры могут изменяться? Как расположена плоскость α относительно рёбер параллелепипеда?»

Учащиеся должны понять, что плоскость α , проходящая через точку M и параллельная AC , может занимать различные положения, относительно ребра DD_1 . Возникает вопрос: «Какие случаи возможны?».

3. Выдвижение гипотез (гипотетические вопросы)

Учитель стимулирует выдвижение предположений о возможных случаях: «Давайте рассмотрим крайние случаи: плоскость α проходит через вершину D_1 ? через вершину D ? Какие фигуры получатся в каждом случае? Существуют ли такие положения плоскости, при которых сечение является треугольником? четырёхугольником?»

Учащиеся выдвигают гипотезы, зарисовывают возможные конфигурации, обосновывают их.

4. Проверка гипотез (критические вопросы)

Учитель направляет на поиск решения, помогая построить опорную конструкцию: «Какое построение обеспечит параллельность плоскости и AC ? На какой признак параллельности прямой и плоскости можно опереться?»

Обсуждение приводит учащихся к следующему построению: плоскость должна содержать точку M и прямую, параллельную AC . Затем необходимо выяснить, какие элементы параллелепипеда эта плоскость пересекает.

Учитель продолжает: «Где в параллелепипеде расположены прямые того же направления, что и AC ? Какие из них помогут построению?» В качестве примера учащиеся называют диагональ A_1C_1 верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$: она параллельна AC .

5. Вывод (обобщающие вопросы) и фиксация опорной конструкции

Учитель помогает сформулировать итог и выделить опорную конструкцию: «Что общего у всех полученных сечений? Какая опорная конструкция объединяет все рассмотренные случаи? От чего зависит форма сечения?»

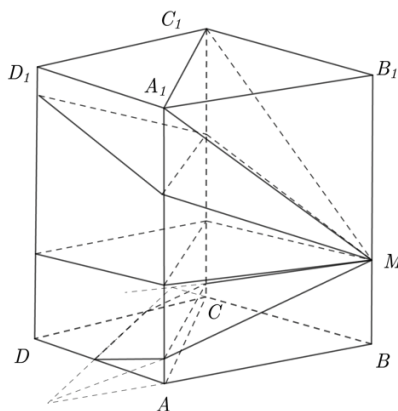
Учащиеся фиксируют опорную конструкцию: плоскость, проходящая через точку на ребре параллельно диагонали основания, пересекает параллелепипед по параллелограмму (в общем случае).

Далее учащиеся решают задачу: находят точки пересечения плоскости α с рёбрами параллелепипеда, определяют форму сечения, вычисляют его периметр и площадь.

Опорная конструкция: прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с диагональю основания AC . Плоскость α содержит точку M ребра BB_1 и параллельна AC . Сечение рассматривается как параллелограмм; прямоугольник выделяется в качестве его частного случая.

Тезис-обобщение:

При таком способе построения сечений прямоугольного параллелепипеда параллельно диагонали основания исследуются параллелограммы, в том числе прямоугольники. Длины их сторон выражаются с помощью пропорций, зависящих от выбора точки на ребре. Данный подход может быть обобщён на любые параллелепипеды и призмы, где есть параллельные диагонали оснований.



Задача 2 с правильным тетраэдром на параллельность плоскостей (ТИП IV)

В правильном тетраэдре $DABC$ с ребром a проведено сечение, параллельное грани DBC и проходящее через точку на ребре AB . Постройте сечение и найдите его площадь.

Методические рекомендации по работе с задачей в рамках методики использования несократического диалога:

1. Постановка задачи (общий неоднозначный вопрос):
Учитель начинает диалог с вопроса, который подчёркивает скрытую неопределённость: «Давайте построим сечение. У кого что получилось?»

2. Выявление неопределённости (уточняющие вопросы):
Учащиеся должны осознать, что положение точки на ребре AB не задано, что создаёт неявную многозначность условия. Вопросы учителя:

- «Какая точка на ребре AB имеется в виду? Это любая точка или какая-то конкретная?»
- «Если точка неопределена, то сколько различных сечений может существовать? От чего зависит их количество и форма?»
- «Что значит „сечение, параллельное грани DBC “? Какую фигуру представляет собой такое сечение?»
- «Как связаны между собой все такие сечения?»

3. Выдвижение гипотез (гипотетические вопросы):

Учитель стимулирует учащихся выдвигать предположения о возможных случаях:

- «Давайте рассмотрим крайние случаи: точка на ребре АВ совпадает с А, затем с В. Что мы получим в каждом случае?»
- «Как вы думаете, будет ли площадь сечения зависеть от выбора точки на ребре АВ? Если да, то как?»
- «Существует ли такое сечение, площадь которого равна половине площади грани DBC? А четверти? Исследуйте этот вопрос.»

4. Проверка гипотез (критические вопросы):

Учитель направляет на поиск решения, помогая построить опорную конструкцию:

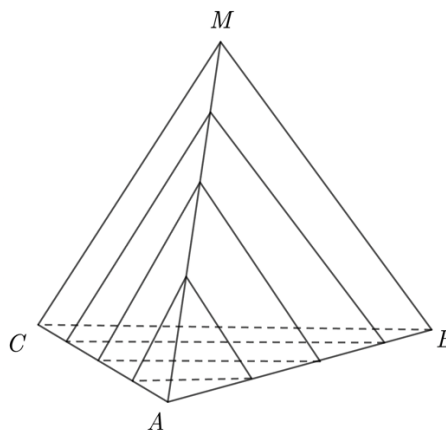
- «Как построить сечение, параллельное грани DBC? Вспомните признак параллельности плоскостей.»
- «Обратите внимание: плоскость, параллельная DBC, пересекает грани ABC, ABD и ACD по прямым, параллельным соответствующим рёбрам грани DBC. Какие это рёбра?»
- «Какой фигурой является сечение? Как найти её площадь, зная сторону а и положение точки на ребре АВ?»

5. Вывод (обобщающие вопросы) и фиксация опорной конструкции:

Учитель помогает сформулировать итог и выделить опорную конструкцию:

- «К какой задаче мы свели исходную? К исследованию семейства подобных треугольников?»
- «Что является опорной конструкцией в этой задаче?»
- «Какой вывод можно сделать о площади сечения в зависимости от положения точки на ребре АВ?»
- «Какие значения может принимать площадь такого сечения? Существует ли максимальное и минимальное значение?»

Опорная конструкция



Тезис-обобщение:

В правильном тетраэдре все сечения, параллельные одной из его граней, являются подобными треугольниками, причём коэффициент подобия линейно зависит от расстояния от противоположащей вершины до секущей плоскости (или от положения точки на ребре, выходящем из этой вершины). Площадь сечения непрерывно меняется от 0 (когда сечение проходит через вершину) до площади грани (когда сечение совпадает с гранью). Это позволяет исследовать все возможные значения площади сечения и решать обратные задачи: например, находить положение точки, при котором площадь сечения равна заданной величине.

ТЕМА: ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ

Задача 1 с кубом на перпендикулярность прямой и плоскости (ТИП III)

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a , на ребре AA_1 выбрана точка M . Через точку M проведена плоскость, перпендикулярная прямой BD_1 . Какой фигурой является сечение?

Методические рекомендации по работе с задачей в рамках методики использования неосократического диалога:

1. Постановка задачи (общий неоднозначный вопрос): Учитель ставит вопрос, который задаёт направление исследования: «Какой будет форма сечения?»

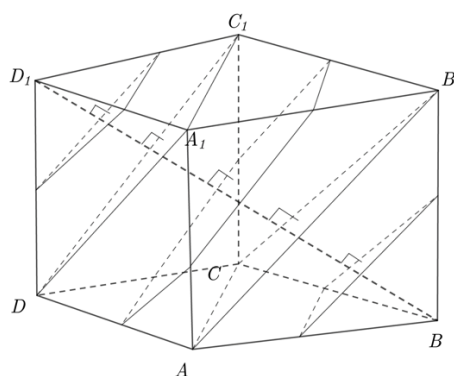
2. Выявление неопределённости (уточняющие вопросы): Учащиеся должны понять, что плоскостей, перпендикулярных BD_1 , бесконечно много и все они параллельны друг другу. Вопросы учителя: Чем определено сечение? Как его нарисовать?

3. Выдвижение гипотез (гипотетические вопросы): Учащиеся выдвигают гипотезы о форме сечения. Учитель стимулирует: «Давайте рассмотрим крайние случаи: $M = A$ и $M = A_1$. Какие фигуры мы получим? Как форма будет меняться при движении точки?»

4. Проверка гипотез (критические вопросы) и построение опорной конструкции: Учитель направляет: «Как построить плоскость, перпендикулярную BD_1 ? Нам нужен перпендикуляр к BD_1 . Как связаны рёбра параллелепипеда и его диагональ? Можно ли найти плоскость, перпендикулярную диагонали, проходящую через вершину?» Учащиеся должны прийти к необходимости рассмотреть ортогональную проекцию диагонали BD_1 на плоскость основания.

5. Фиксация опорной конструкции и вывод (обобщающие вопросы): Учитель помогает сформулировать итог: «Мы свели задачу к исследованию семейства параллельных плоскостей. Что является опорной конструкцией? От чего зависит, сколько сторон будет иметь сечение?»

Опорная конструкция: Диагональ прямоугольного параллелепипеда BD_1 и перпендикулярная к ней плоскость. За исходную берётся одна из плоскостей семейства, содержащая вершину D (или B); остальные искомые плоскости ей параллельны. Чтобы установить форму сечения, подсчитывают пересечённые рёбра параллелепипеда.



Тезис-обобщение:

Задача о сечении прямоугольного параллелепипеда плоскостью, перпендикулярной его диагонали, сводится к исследованию семейства параллельных плоскостей. Форма сечения (треугольник, четырёхугольник, пятиугольник, шестиугольник) меняется при переходе плоскости через вершины параллелепипеда. Ключевым приёмом является нахождение плоскости, перпендикулярной диагонали и содержащей одну из вершин; далее исследуется, сколько рёбер она пересекает.

Задача 2 с правильной четырёхугольной пирамидой на перпендикулярность плоскостей (ТИП V)

Рассмотрите правильную четырёхугольную пирамиду $SABCD$ с вершиной S и основанием $ABCD$. Через S проходит плоскость, перпендикулярная плоскости основания. Какие вопросы допускает это условие? Сформулируйте несколько вариантов, выберите один из них и решите соответствующую задачу

Методические рекомендации по работе с задачей в рамках методики использования несократического диалога:

1. Постановка задачи (общий неоднозначный вопрос): Учитель вопросами подводит учащихся к осознанию неоднозначности условия.

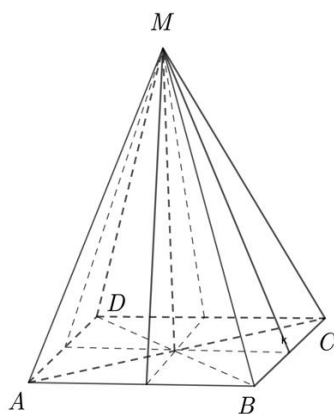
Учитель подводит к самостоятельной постановке задачи: «Перед нами семейство плоскостей. Что мы можем о них узнать?»

2. Выявление неопределённости и целеполагание: Учитель помогает классифицировать возможные вопросы, используя типологию: «Нас могут интересовать метрические характеристики (например, угол между плоскостью и ребром), пересечения этих плоскостей с пирамидой (форма сечения), взаимное расположение этих плоскостей (например, существует ли плоскость, перпендикулярная всем им?)»

3. Выдвижение и проверка гипотез: Учитель выступает как фасилитатор. Если выбрана задача на построение сечения, он задаёт направляющие вопросы: «Как выглядит такое сечение? Какая опорная конструкция здесь работает? Будет ли форма сечения зависеть от выбора плоскости?»

4. Вывод и фиксация опорной конструкции: Результатом диалога становится обобщение. Учитель задаёт обобщающий вопрос: «Что общего у всех этих плоскостей? Через какую прямую они все проходят?»

Опорная конструкция: пирамида $SABCD$ и содержащая S плоскость, перпендикулярная основанию. Высота SO принадлежит любой такой плоскости. Поэтому всё множество рассматриваемых плоскостей представляет собой пучок с общей прямой SO .



Тезис-обобщение:

Высота пирамиды служит общей прямой пучка, образованного плоскостями, которые содержат её вершину и перпендикулярны основанию. Исследование такой конфигурации позволяет решать широкий круг задач: от нахождения сечений до определения углов между плоскостями. Ключевым является выделение оси симметрии (высоты) как опорного элемента.

ТЕМА: РАССТОЯНИЕ

Задача 1 с треугольной призмой на расстояние от точки до плоскости внутри фигуры (ТИП IV)

Задача. Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны a . На A_1C_1 , BC и AC выбраны соответственно точки M , K и E . Каждая делит своё ребро в отношении $m:n$: отсчёт ведётся от A_1 для M , от B для K и от A для E . Каково расстояние от вершины A до плоскости EMK ?

Методические рекомендации по работе с задачей в рамках методики использования неосократического диалога

1. Постановка задачи (общий неоднозначный вопрос)

Учитель начинает диалог с вопроса, который побуждает учащихся осознать наличие параметра и скрытую неопределённость: «Как вы думаете, каким будет расстояние от точки A до плоскости EMK ?

Учащиеся высказывают предположения о возможных случаях, связанных с положением плоскости EMK относительно точки A .

2. Выявление неопределённости (уточняющие вопросы)

Учитель направляет внимание учащихся на анализ условия: «Что в задаче является фиксированным, а что переменным? Как введение параметра $m:n$ влияет на положение точек М, К и Е? Можно ли рассмотреть частные случаи?»

Учащиеся должны понять, что отношение $m:n$ задаёт положение точек на рёбрах, и при изменении этого отношения меняется взаимное расположение плоскости ЕМК и точки А. Возникает вопрос: «При каком соотношении $m:n$ плоскость ЕМК будет проходить через точку А?»

3. Выдвижение гипотез (гипотетические вопросы)

Учитель стимулирует выдвижение предположений о возможных случаях: «Давайте рассмотрим частные случаи: $m = n$ (точки – середины рёбер), $m = 0$ (М совпадает с A_1 , К совпадает с В, Е совпадает с А), $n = 0$ (М совпадает с C_1 , К совпадает с С, Е совпадает с С). Как будет меняться расстояние в каждом случае? Существует ли такое отношение $m:n$, при котором плоскость ЕМК проходит через точку А?»

Учащиеся выдвигают гипотезы, зарисовывают возможные конфигурации.

4. Проверка гипотез (критические вопросы)

Учитель направляет на поиск решения: «Как найти расстояние от точки до плоскости в общем виде?»

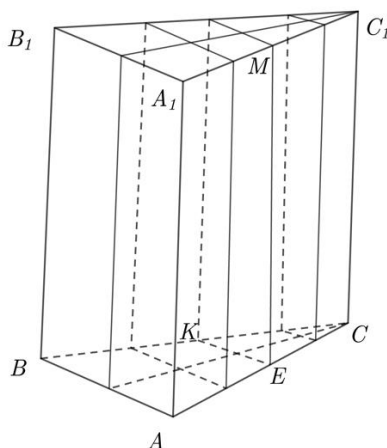
5. Вывод (обобщающие вопросы) и фиксация опорной конструкции

Учитель помогает сформулировать итог: «Как зависит расстояние от отношения $m:n$? При каком значении $m:n$ расстояние обращается в ноль? Какой вывод можно сделать о поведении функции расстояния?»

Учащиеся фиксируют опорную конструкцию: плоскость ЕМК, заданная тремя точками на рёбрах призмы; расстояние от точки А до этой плоскости вычисляется через поиск отрезка высоты, заключенной между ВА и КЕ.

Опорная конструкция:

Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. В ней выделена плоскость ЕМК, где $E \in AC$, $K \in BC$, $M \in A_1C_1$, причём $AE : EC = BK : KC = A_1M : MC_1 = m : n$ откуда следует параллельность плоскости ЕМК с плоскостью ABB_1 .



Тезис-обобщение:

Задача на нахождение расстояния от точки до плоскости в правильной треугольной призме с параметрическим условием решается сведением к планиметрической задаче нахождения высоты в трапециевидном сечении призмы. Плоскость этого сечения перпендикулярна той, до которой определяется расстояние. Для получения опорной конструкции её проводят через AA_1 перпендикулярно ЕМК. Введение параметра позволяет исследовать зависимость расстояния от положения точек на рёбрах и установить границы его изменения: от 0 (когда плоскость проходит через точку А) до $a\sqrt{3}/4$ (когда точки являются серединами рёбер). Полученный результат может быть обобщён на задачи нахождения расстояния от точки до плоскости в любых

призмах, где удаётся выделить опорное сечение, перпендикулярное искомой плоскости, и свести пространственную задачу к планиметрической.

Задача 2 с шестиугольной пирамидой на расстояние от точки до плоскости (ТИП V)

Рассматривается правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$: S – вершина, $ABCDEF$ – основание, длина каждого ребра равна a . На SC отмечена его середина M . Какие вопросы о расстояниях от M до внутренних объектов пирамиды можно поставить при исследовании данной геометрической конфигурации? Выберите один из вопросов, связанный с нахождением расстояния от точки до прямой, и проведите его исследование.

Методические рекомендации по работе с задачей в рамках методики использования несократического диалога

1. Постановка задачи (общий неоднозначный вопрос)

Учитель задаёт общий вопрос: «Перед нами правильная шестиугольная пирамида с отмеченной точкой M – серединой ребра SC . Какие вопросы о расстоянии от точки M до различных объектов внутри пирамиды вы можете сформулировать?»

Учащиеся предлагают варианты:

- как далеко M находится от стороны основания, например AB ;
- каково расстояние от M до одной из диагоналей основания, например AD ;
- на каком расстоянии M находится от бокового ребра SA или SD ;
- каково расстояние от M до апофемы, то есть высоты боковой грани;
- каково расстояние от M до высоты SO ;
- расстояние от точки M до прямой, проходящей через вершину основания и центр.

2. Выявление неопределённости и целеполагание

Учитель помогает классифицировать возможные вопросы: «Давайте разделим ваши вопросы на группы: расстояния до рёбер основания, до боковых рёбер, до внутренних элементов (высота, апофема). На каком вопросе о расстоянии до прямой остановимся для дальнейшего исследования?»

Учащиеся выбирают направление работы. Например, можно определить расстояние от M до прямой AD , содержащей диагональ основания, либо до прямой SO , содержащей высоту пирамиды.

3. Выдвижение гипотез (гипотетические вопросы)

Учитель стимулирует выдвижение предположений о возможных способах решения: «Какие известные вам способы позволяют определить расстояние до прямой в пространстве? Какой способ подходит для нашей фигуры? Удастся ли перейти к задаче на плоскости?»

Среди предложений учащихся:

- провести из M перпендикуляр к рассматриваемой прямой;
- найти площадь треугольника, образованного точкой M и двумя точками на прямой, и вычислить высоту;
- использовать векторно-координатный метод.

4. Проверка гипотез (критические вопросы)

Учитель направляет на поиск решения: «Что нам нужно знать, чтобы найти расстояние от точки M до выбранной прямой? Какие элементы пирамиды нам известны? Можно ли найти плоскость, в которой лежат точка M и данная прямая?»

Учащиеся, отвечая на вопросы, приходят к необходимости:

- определить взаимное расположение точки M и выбранной прямой;
- найти сечение пирамиды, содержащее точку M и данную прямую;
- свести задачу к нахождению высоты в полученном плоском треугольнике.

5. Вывод (обобщающие вопросы) и фиксация опорной конструкции

Учитель помогает сформулировать итог: «Какой способ оказался наиболее эффективным? Почему? К какой задаче мы свели исходную? Что является опорной конструкцией?»

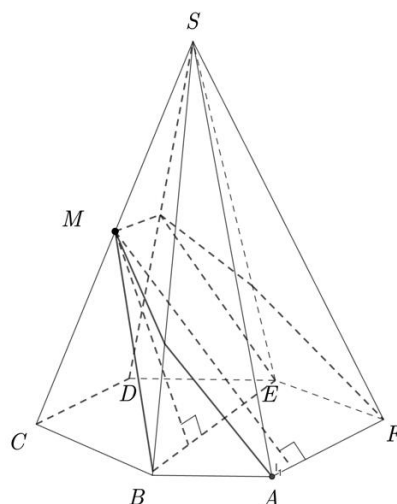
Учащиеся фиксируют опорную конструкцию: рассматривается сечение, плоскость которого содержит M и заданную прямую. В выделенном треугольнике искомое расстояние выражается длиной высоты.

Выбранный вопрос и его исследование

Вопрос: определить расстояние от середины M ребра SC до прямой AD , содержащей диагональ основания правильной шестиугольной пирамиды.

Опорная конструкция:

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с ребром a рассматриваются выделенные плоскости и проведённые к ним перпендикуляры.



Тезис-обобщение:

Чтобы определить расстояние от точки до прямой в правильной шестиугольной пирамиде, переходят к планиметрической задаче в сечении: его плоскость выбирают через эту точку и прямую. Ключевым приёмом является выделение опорной конструкции – треугольника или трапеции, в которых расстояние от точки до прямой является высотой. Полученный результат может быть обобщён на задачи нахождения расстояния от точки до прямой в любых многогранниках, где удаётся выделить сечение, содержащее данную точку и данную прямую.

Констатирующий этап

Письменная работа

Задача 1 (тип III – с параметром)

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 5. Точка M движется по ребру BB_1 от B до B_1 . Обозначим $\psi(x)$ угол между прямой AM и плоскостью ABC , где $x = BM/BB_1$, $x \in [0, 1]$.

Вопрос учителя (для осознания неопределённости):
«Как вы думаете, будет ли угол φ одинаковым для всех положений точки M или он будет меняться?»

Задания:

1. Сформулируйте гипотезу о характере зависимости угла φ от параметра x (например, возрастает, убывает, постоянен, имеет максимум/минимум).
2. Задайте один содержательный математический вопрос, который нужно было бы прояснить, чтобы сделать решение задачи определённым (например, о способе вычисления, о дополнительных данных, о границах применимости).
3. Проверьте свою гипотезу для двух частных случаев: $x = 0$ (точка M совпадает с A) и $x = 1$ (точка M совпадает с A_1). Если гипотеза не подтверждается, уточните её.

Задача 2 (тип IV – на анализ существования)

Ниже приведено решение задачи, выполненное вашим соседом по парте. Проверьте его.

Условие задачи:

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с рёбрами $AB = 2$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$ точка K – середина ребра CC_1 . Найдите угол между прямой BK и плоскостью ABC .

Решение соседа:

1. Плоскость ABC – это нижнее основание.

2. Прямая ВК пересекает нижнее основание в точке В.
3. Из точки К опущу перпендикуляр к плоскости ABC и обозначу его основание Н. Полученная точка Н является проекцией К на эту плоскость.
4. Тогда в качестве проекции прямой ВК на плоскость ABC получаю отрезок ВН.
5. Искомому углу между ВК и плоскостью ABC соответствует угол КВН. Найду его из треугольника КВН.
6. В треугольнике КВН легко найти $VH = \frac{BD}{2} = 2$ и $BK = 2$, по теореме Пифагора из треугольника КВС.
7. Тогда $\cos \angle KBH = VH/BK = 1$, то есть $\angle KBH = 45^\circ$.
8. Ответ: $\angle KBH = 45^\circ$.

Задания:

1. Определите, правильно ли решена задача. Если есть ошибки, найдите их и запишите правильное решение.
2. Представьте, что вы объясняете соседу его ошибку, но не можете прямо сказать «ты ошибся здесь». Сформулируйте один вопрос к соседу, который поможет ему самостоятельно обнаружить противоречие в своём рассуждении.

Задача 3 (тип V – с несформулированным требованием)

Дана правильная четырёхугольная пирамида SABCD со стороной основания 2. Точка М – середина ребра SC.

Задания:

1. Сформулируйте не менее трёх различных вопросов для исследования этой геометрической конфигурации (например, о длинах отрезков, о величинах углов, о взаимном расположении прямых и плоскостей, о форме сечений и т.п.). Вопросы не должны повторять друг друга по типу.
2. Выберите один из сформулированных вопросов и кратко опишите, как вы будете его исследовать (какие опорные конструкции потребуются, какие теоремы или формулы могут быть использованы).

3. Если для ответа на выбранный вопрос не хватает данных, укажите, какие дополнительные условия могли бы сделать решение определённым.

Критерии оценивания

Задача	Максимальный балл
Задача 1 (тип III – с параметром)	30 баллов
Задача 2 (тип IV – на анализ существования)	30 баллов
Задача 3 (тип V – с несформулированным требованием)	40 баллов
ИТОГО	100 баллов

Задача 1 (максимум 30 баллов)

Задание 1.1. Сформулируйте гипотезу о характере зависимости угла φ от параметра x (максимум 10 баллов)

Баллы	Критерий
10	Гипотеза сформулирована чётко и содержательно: указан конкретный характер зависимости (например, «угол возрастает», «убывает», «имеет максимум»), при этом гипотеза осмысленна и соответствует геометрической ситуации.
7–9	Гипотеза сформулирована, но носит общий характер (например, «угол меняется») без указания характера изменения.
4–6	Гипотеза выдвинута, но не соответствует геометрической ситуации (например, «угол постоянен» без обоснования).
0–3	Гипотеза отсутствует или сформулирована не по существу задачи.

Задание 1.2. Задайте один содержательный математический вопрос (максимум 10 баллов)

Баллы	Критерий
10	Сформулирован содержательный математический вопрос, который позволяет перевести неопределённую ситуацию в задачу с чётким алгоритмом решения

Баллы	Критерий
	(например, о способе вычисления угла, о необходимых дополнительных построениях, о границах применимости формулы).
7–9	Вопрос сформулирован, но не является содержательным – сводится к пересказу условия или просьбе «найти угол» без указания возможного способа.
4–6	Вопрос сформулирован, но не относится к математическому содержанию задачи.
0–3	Вопрос отсутствует или не имеет смысла.

Задание 1.3. Проверьте гипотезу для двух частных случаев: $x = 0$ и $x = 1$ (максимум 10 баллов)

Баллы	Критерий
10	Гипотеза проверена для обоих частных случаев ($x = 0$ и $x = 1$) с корректными вычислениями углов; сделан вывод о подтверждении или уточнении гипотезы.
7–9	Оба частных случая рассмотрены, но в вычислениях допущены негрубые ошибки (арифметические или в определении угла); вывод сделан.
4–6	Рассмотрен только один частный случай; либо оба случая рассмотрены, но вывод отсутствует.
0–3	Частные случаи не рассмотрены; либо рассмотрены неверно.

Задача 2 (максимум 30 баллов)

Задание 2.1. Определите, правильно ли решена задача; найдите ошибки и запишите правильное решение (максимум 20 баллов)

Баллы	Критерий
18–20	Ошибка обнаружена и правильно объяснена; предложено полное верное решение задачи с корректными вычислениями и обоснованиями.
12–17	Ошибка обнаружена, но объяснение неполное; решение содержит негрубые недочёты (например, арифметическая ошибка при правильном ходе решения).
6–11	Ошибка обнаружена, но не объяснена; правильное решение не предложено либо содержит грубые ошибки.
0–5	Ошибка не обнаружена (учащийся считает решение верным); либо ошибка обнаружена неверно.

Задание 2.2. Сформулируйте вопрос к соседу, который поможет ему самостоятельно обнаружить противоречие (максимум 10 баллов)

Баллы	Критерий
10	Сформулирован точный наводящий вопрос, который не содержит прямого указания на ошибку, но направляет внимание на проблемный шаг в рассуждении (например, «Как ты определил, что $BH = BD/2$?», «Где находится проекция точки К на плоскость ABC?»).
7–9	Вопрос сформулирован, но слишком общий (например, «Проверь вычисления») и не помогает точно локализовать ошибку.
4–6	Вопрос сформулирован, но прямо указывает на ошибку («Ты не прав здесь») – нарушено условие задания.
0–3	Вопрос отсутствует или не относится к содержанию задачи.

Задача 3 (максимум 40 баллов)

Задание 3.1. Сформулируйте не менее трёх различных вопросов для исследования конфигурации (максимум 15 баллов)

Баллы	Критерий
13–15	Сформулировано не менее трёх вопросов, каждый из которых относится к разному типу (например, о длинах, об углах, о взаимном расположении, о сечениях) и является математически содержательным.
9–12	Сформулировано не менее трёх вопросов, но они однотипны (например, все только о длинах отрезков) или часть вопросов не являются содержательными.
5–8	Сформулировано менее трёх вопросов; либо вопросы сформулированы, но не относятся к математическому исследованию конфигурации.
0–4	Вопросы отсутствуют либо носят формальный характер («что дано?», «что найти?»).

Задание 3.2. Выберите один вопрос и опишите, как вы будете его исследовать (максимум 15 баллов)

Баллы	Критерий
13–15	Выбран один вопрос; описан чёткий план исследования: указаны необходимые опорные конструкции (сечения, дополнительные плоскости, вспомогательные треугольники), перечислены теоремы или формулы, которые могут быть использованы (Пифагора, о трёх перпендикулярах, свойства правильных фигур).
9–12	План исследования описан, но неполно: указаны опорные конструкции, но не названы теоремы; или наоборот.
5–8	План описан поверхностно, без указания конкретных конструкций и теорем.
0–4	План отсутствует; либо выбранный вопрос не соответствует содержанию задачи.

Задание 3.3. Если для ответа на выбранный вопрос не хватает данных, укажите, какие дополнительные условия необходимы (максимум 10 баллов)

Баллы	Критерий
10	Чётко указано, достаточно ли данных для ответа на выбранный вопрос; если данных недостаточно, названы конкретные дополнительные условия, которые сделали бы решение определённым.
7–9	Указано, достаточно ли данных, но без обоснования; либо дополнительные условия названы, но не конкретизированы.
4–6	Утверждение о достаточности/недостаточности данных не обосновано или содержит ошибку.
0–3	Требование задания не выполнено.

Итоговая шкала перевода баллов в уровни

Сум- марный балл	Уровень	Критерий отнесения
70–100	Высокий	Учащийся набрал 70 и более баллов, что свидетельствует о способности самостоятельно выдвигать содержательные гипотезы, формулировать точные математические вопросы, обнаруживать и объяснять противоречия в ходе решения, аргументированно строить рассуждение, а также верно решать стереометрические задачи с использованием и модификацией опорных конструкций.
40–69	Средний	Учащийся набрал от 40 до 69 баллов, что соответствует частичному владению указанными умениями: гипотезы и вопросы формулирует, но не всегда содержательно; противоречия замечает с помощью наводящих вопросов; рассуждения строит, но допускает логические погрешности; стереометрические задачи решает с недочётами; опорную конструкцию использует, но модифицирует с трудом.
0–39	Низкий	Учащийся набрал менее 40 баллов, что указывает на несформированность исследовательских и коммуникативных умений в рамках диагностики: гипотезы не выдвигает, вопросы не задаёт; противоречия не фиксирует; рассуждения фрагментарны или отсутствуют; стереометрические задачи не решены или решены неверно; опорная конструкция не используется.

Контрольный этап

Задача 1 (тип III – с параметром)

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны b . Точка N движется по ребру SC от S до C . Обозначим $\psi(t)$ угол между прямой AN и плоскостью основания $ABCD$, где $t = SN/SC$, $t \in [0,1]$.

Вопрос учителя (для осознания неопределённости):
«Будет ли угол ψ одинаковым для всех положений точки N или он будет меняться?»

Задания:

1. Сформулируйте гипотезу о характере зависимости угла ψ от параметра t (например, возрастает, убывает, постоянен, имеет максимум/минимум).
2. Задайте один содержательный математический вопрос, который нужно было бы прояснить, чтобы сделать решение задачи определённым (например, о способе вычисления, о дополнительных данных, о границах применимости).
3. Проверьте свою гипотезу для двух частных случаев: $t = 0$ (точка N совпадает с S) и $t = 1$ (точка N совпадает с C). Если гипотеза не подтверждается, уточните её.

Задача 2 (тип IV – на анализ существования)

Ниже приведено решение задачи, выполненное вашим соседом по парте. Проверьте его.

Условие

задачи:

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с рёбрами $AB = 4$, $AD = 2$,

$AA_1 = 6$ точка L – середина ребра BB_1 . Найдите угол между прямой DL и плоскостью $A_1B_1C_1$.

Решение соседа:

1. Плоскость $A_1B_1C_1$ – это верхнее основание.
2. Прямая DL пересекает верхнее основание? Нет, D – нижняя вершина, L – на боковом ребре.
3. При проецировании L на плоскость $A_1B_1C_1$ получаю B_1 .
4. Проецирование D на ту же плоскость даёт D_1 .
5. Следовательно, проекцией прямой DL на плоскость $A_1B_1C_1$ будет отрезок D_1B_1 .
6. Угол между прямой DL и плоскостью $A_1B_1C_1$ – это угол между DL и D_1B_1 .
7. Векторы: $D_1B_1 = (4, 0, 0)$, $DL = (4, -2, 6)$.
8. $\cos \text{ угла} = (16)/(4 \cdot \sqrt{(16+4+36)}) = 16/(4 \cdot \sqrt{56}) = 4/\sqrt{56} = 2/\sqrt{14}$.
9. Ответ: $\arccos(2/\sqrt{14})$.

Задания:

1. Определите, правильно ли решена задача. Если есть ошибки, найдите их и запишите правильное решение.
2. Представьте, что вы объясняете соседу его ошибку, но не можете прямо сказать «ты ошибся здесь». Сформулируйте один вопрос к соседу, который поможет ему самостоятельно обнаружить противоречие в своём рассуждении.

Задача 3 (тип V – с несформулированным требованием)

Дана правильная треугольная пирамида $MABC$ с основанием ABC . Все боковые рёбра равны, сторона основания равна 4, высота пирамиды равна 5. Точка K – середина ребра MB .

Задания:

1. Сформулируйте не менее трёх различных вопросов для исследования этой геометрической конфигурации (например, о длинах отрезков, о величинах углов, о взаимном расположении прямых и плоскостей, о форме сечений и т.п.). Вопросы не должны повторять друг друга по типу.
2. Выберите один из сформулированных вопросов и кратко опишите, как вы будете его исследовать (какие опорные конструкции потребуются, какие теоремы или формулы могут быть использованы).
3. Если для ответа на выбранный вопрос не хватает данных, укажите, какие дополнительные условия могли бы сделать решение определённым.

Итоговая контрольная работа по стереометрии

Часть 1. Закрытые задачи (стандартные)

Задание 1. Основание правильной треугольной пирамиды имеет сторону 6; длина бокового ребра – 5. Определите угол, образованный боковым ребром и плоскостью основания.

Задание 2. Рёбра прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ имеют длины $AB=3$, $AD=4$, $AA_1=5$. Определите величину угла, который образуют BD_1 и AC .

Часть 2. Частично открытые задачи

Задача 4 (на узнавание и адаптацию опорной конструкции)

В четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основание $ABCD$ – трапеция с основаниями $AD = 8$, $BC = 4$ и высотой 3. Боковые рёбра перпендикулярны основанию и равны 6. Найдите угол между скрещивающимися прямыми AB_1 и CD_1 .

Дополнительные задания:

а) Выделите опорную конструкцию, аналогичную той, которая использовалась при решении подобных задач на правильной призме. Какие элементы сохранились, а какие изменились?

б) Докажите, что выбранное построение позволяет найти угол для рассматриваемой призмы с трапецией в основании.

в) Сопоставьте результат с ответом для прямоугольной призмы при сохранении тех же линейных размеров. Чем объясняется совпадение либо различие ответов?

Задача 5 (с параметром и исследованием)

Основание $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ имеет сторону a . Боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α . При движении M по SC от S к C рассматривается угол между AM и плоскостью основания; обозначим его $\varphi(t)$, где $t = SM/SC$, $t \in [0,1]$.

Дополнительные задания:

а) Выразите $\sin \varphi(t)$ через a , α и t .

б) Исследуйте, как меняется $\varphi(t)$ при изменении t от 0 до 1. При каком t угол φ достигает наибольшего значения?

в) Сформулируйте обобщение: как зависит характер монотонности $\varphi(t)$ от величины угла α ? Рассмотрите отдельно случаи $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 60^\circ$.

Задача 6 (на формулировку вопросов и исследование существования)

В правильной шестиугольной призме все боковые грани – квадраты со стороной 2. Рассмотрим плоскость, проходящую через диагональ нижнего основания и середину противоположного бокового ребра.

Дополнительные задания:

а) Сформулируйте не менее трёх различных вопросов для исследования этой геометрической конфигурации (например, о взаимном расположении, о форме сечения, о величинах углов и т.п.).

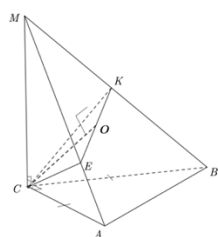
б) Выберите один из сформулированных вопросов и проведите его исследование, указав, какие опорные конструкции вам для этого потребовались.

в) Определите, при каком условии поставленная вами задача имеет решение, а при каком – нет. Обоснуйте ответ.

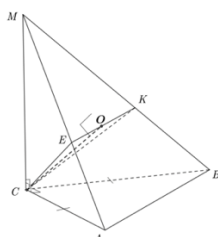
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Учитель: так, получается, мы будем работать с треугольником в сечении. Давайте посмотрим внимательно на все наши гипотезы. Как вы думаете, что их объединяет? (рис 3.). (*Учитель подытоживает диалог, чтобы удержать внимание на фокусе проблемы*).

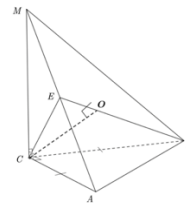
Ученик: они все содержат перпендикуляр, опущенный из C на плоскость AMB .



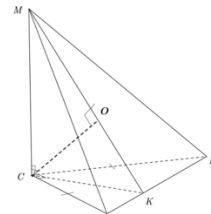
а)



б)



в)



г)

Рис. 3. Усовершенствованные гипотезы учащихся

Учитель: хорошо, тогда если мы соберем эти конструкции в одной фигуре, что мы получим?

Ученик: мы получим множество плоскостей, проходящих через перпендикуляр к другой плоскости.

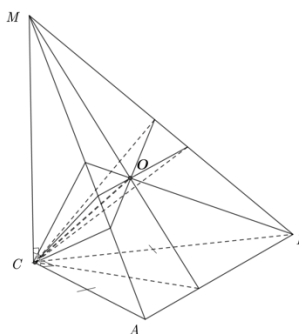


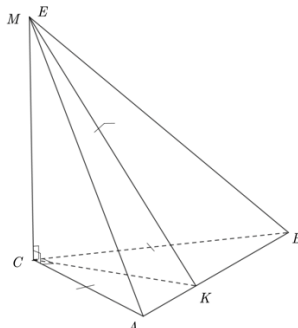
Рис. 4. Опорная конструкция

Учитель: так, хорошо, давайте теперь решим задачу. Нас просили найти площадь и периметр. (*направление мысли*)

Далее остается классу разделится на группы и решить задачу для каждой приведенной гипотезы, а затем сравнить ответы.

Учитель заранее знает, что некоторые случаи более сложно решаются, чем другие, в соответствии с чем он может дифференцировать класс.

Рассмотрим самый легкий случай, когда сечение ЕСК расположено таким образом, что точка К принадлежит АВ.



Ниже приведем решение задачи.

Рассмотрим равнобедренный треугольник АСВ. Пусть $AC = x$, тогда по теореме Пифагора

$$x^2 + x^2 = 400$$

$$2x^2 = 400$$

$$x^2 = 200$$

$$x = \sqrt{200}$$

$$x = 10\sqrt{2}$$

Заметим, что К – середина АВ. Тогда по теореме Пифагора в треугольнике АСК: $СК = \sqrt{200 - 100} = \sqrt{100} = 10$

Далее замечаем, что треугольник СКМ – прямоугольный, катеты которого мы знаем, тогда $S_{СКМ} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 = 50$.

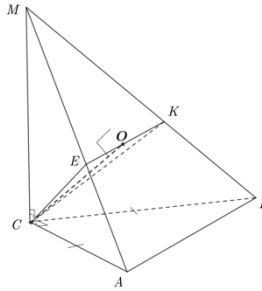
По теореме Пифагора в треугольнике СКЕ: $ЕК = \sqrt{100 + 100} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$.

$$\text{Тогда } P = 20 + 10\sqrt{2}.$$

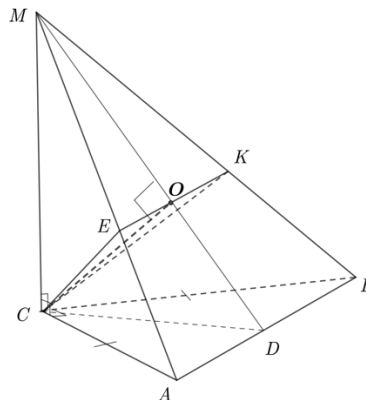
Решим задачу для другого случая.

Заметим, что гипотеза под пунктом б), когда отрезок ЕК параллелен прямой АВ несколько сложнее, так как учащемуся для начала нужно понять,

где на отрезке МК расположена точка О, являющаяся основанием перпендикуляра, опущенного из точки С.



Сначала следует рассмотреть треугольник CMD, где станет понятно, что он равнобедренный, а значит высота является медианой и тогда сделать вывод о том, что точка О принадлежит середине MD.



Тогда и точки Е, К, будут принадлежать серединам отрезков АМ и МВ в связи с теоремой Фалеса.

Тогда останется найти медиану прямоугольного треугольника АСМ.

По теореме Пифагора в треугольнике АСМ: $AM = \sqrt{100 + 200} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$.

$CE = \frac{1}{2}AM = 5\sqrt{3} = CK$, в связи с равенством треугольников АСМ и СВМ в гранях.

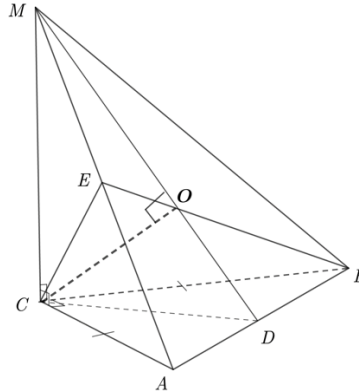
Тогда $EK = \frac{1}{2}AB = 10$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5\sqrt{2} = 25\sqrt{2}$$

$$P_{CEK} = 10 + 10\sqrt{3}$$

Рассмотрим более сложную ситуацию из гипотезы под пунктом в).

Отягощена эта ситуация тем, что изначально необходимо понять, где находится точка Е на ребре АМ. Для этого необходимо рассмотреть треугольник АВМ с высотой в нем и применить теорему Менелая для треугольника МАD и секущей ВЕ.



Теорема Менелая в $\triangle MDA$

$$\frac{AE}{EM} \cdot \frac{MO}{OD} \cdot \frac{BD}{BA} = 1 \text{ (используем, что } MO=OD\text{)}$$

$$\frac{AE}{EM} = \frac{2}{1}$$

$$\text{В } \triangle CAM \quad \cos \angle A = \frac{10\sqrt{2}}{10\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

По теореме косинусов в $\triangle CAE$

$$CE^2 = (10\sqrt{2})^2 + \left(\frac{2 \cdot 10\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{2 \cdot 10\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{200}{3}$$

$$EC = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Далее в } \triangle MAD \quad \cos \angle A = \frac{10}{10\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

По теореме косинусов в $\triangle ABE$

$$BE^2 = (20)^2 + \left(\frac{2 \cdot 10\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \cdot 20 \cdot \frac{2 \cdot 10\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{800}{3}$$

$$BE = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

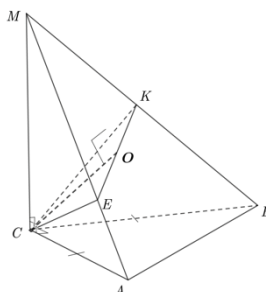
Тогда

$$P_{\triangle CBE} = 10\sqrt{2} + \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{2} + \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$S_{\Delta CBE} = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{100}{\sqrt{3}}$$

И наконец рассмотрим самую сложную гипотезу под пунктом а).

Заметим, что для решения пункта а) ученику необходимо выбрать в каком отношении одна из точек Е или К делит ребро.



За счет этого этот случай наиболее сложный, так как выбор «делит пополам» он сделать не может – его решение сведется к обсуждению гипотезы б). Заметим, что и выбор $AE:EM=2:1$ сведет его к предыдущей рассмотренной нами гипотезе.

Рассмотрим решение для случая $AE:EM=2:3$

Для решения этого случая необходимо будет, во-первых, доказать, что точка К, полученная в результате продолжения ЕО до пересечения со стороной треугольника, попадет на ВМ или АВ. Это возможно сделать путем рассмотрения предельных случаев поворота отрезка ЕО. Заметим, что Е, делящая отрезок МА в отношении 2:3, считая от точки А, находится ближе к А, нежели к М.

Далее необходимо применить дважды теорему Менелая для поиска отношения, в котором точка К делит отрезок МВ.

Рассмотрим подробнее.

1) По теореме косинусов в ΔACE

$$CE^2 = (10\sqrt{2})^2 + \left(\frac{2 \cdot 10\sqrt{3}}{5}\right)^2 - 2 \cdot 10\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 200 + 48 - 160 = 88$$

$$CE = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}$$

2) по теореме Менелая в ΔAMB и секущей ЕК имеем:

$$\frac{BK}{KM} \cdot \frac{ME}{EA} \cdot \frac{XA}{XB} = 1, \text{ где } X - \text{точка пересечения ЕК и АВ.}$$

Далее по теореме Менелая в $\triangle MDB$ и секущей ОК: $\frac{BK}{KM} \cdot \frac{MO}{OD} \cdot \frac{DX}{XB} = 1$

Тогда поделив первое соотношение на второе, получим:

$$\frac{ME}{EA} \cdot \frac{XA}{XB} \cdot \frac{XB}{XD} = 1$$

$$\frac{2}{3} = \frac{XD}{XA} = \frac{XA+AD}{XA} = 1 + \frac{AD}{XA}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{AD}{XA}$$

$$\text{Тогда } \frac{BK}{KM} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{4} = 1$$

$$\frac{BK}{KM} = \frac{4}{3}$$

$$3) \cos \angle DMB = \frac{10\sqrt{2}}{10\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\cos \angle AMB = \cos 2\angle DMB = 2\cos^2 \angle DMB - 1 = 2 \cdot \frac{2}{3} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

По теореме косинусов в $\triangle EMK$

$$EK^2 = \left(\frac{3 \cdot 10\sqrt{3}}{7}\right)^2 + \left(\frac{3 \cdot 10\sqrt{3}}{5}\right)^2 - 2 \cdot \frac{30\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{30\sqrt{3}}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{900 \cdot 3}{49} + \frac{900 \cdot 3}{25} - \frac{360}{7}$$

$$= \frac{900 \cdot 3 \cdot 25 + 900 \cdot 3 \cdot 49 - 360 \cdot 7 \cdot 25}{49 \cdot 25} = \frac{2700 \cdot 74 - 360 \cdot 175}{49 \cdot 25} = \frac{199800 - 63000}{49 \cdot 25} = \frac{136800}{49 \cdot 25}$$

$$EK = \frac{10\sqrt{1368}}{7 \cdot 5} = \frac{20\sqrt{342}}{35} = \frac{4\sqrt{342}}{7}$$

$$4) \cos \angle CMB = \frac{10}{10\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

По теореме косинусов в $\triangle CMK$

$$CK^2 = 10^2 + \left(\frac{3 \cdot 10\sqrt{3}}{7}\right)^2 - 2 \cdot 10 \cdot \frac{3 \cdot 10\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 100 + \frac{900 \cdot 3}{49} - \frac{600}{7}$$

$$= \frac{4900 + 2700 - 4200}{49} = \frac{3400}{49}$$

$$CK = \frac{10\sqrt{34}}{7}$$

$$P_{\triangle CKE} = \frac{10\sqrt{34}}{7} + \frac{4\sqrt{342}}{7} + 2\sqrt{22} = \frac{10\sqrt{34} + 4\sqrt{342} + 14\sqrt{22}}{7}$$

5) По теореме косинусов в $\triangle CEK$

$$\left(\frac{4\sqrt{342}}{7}\right)^2 = 88 + \frac{3400}{49} - 2 \cdot 2\sqrt{22} \cdot \frac{10\sqrt{34}}{7} \cdot \cos \angle CEK$$

$$\frac{\frac{16 \cdot 342}{49} - 88 - \frac{3400}{49}}{\frac{40\sqrt{22 \cdot 34}}{7}} = \cos \angle CEK$$

$$\frac{16 \cdot 342 - 88 \cdot 49 - 3400}{49} \cdot \frac{7}{40\sqrt{22+34}} = \cos \angle CEK$$

$$\frac{2240}{7 \cdot 40\sqrt{22 \cdot 34}} = \cos \angle CEK$$

$$\frac{8}{2\sqrt{187}} = \cos \angle CEK$$

$$\frac{4}{\sqrt{187}} = \cos \angle CEK$$

$$\sin \angle CEK = \sqrt{1 - \frac{16}{187}} = \sqrt{\frac{187-16}{187}} = \sqrt{\frac{171}{187}}$$

$$S_{\triangle CKE} = \frac{1 \cdot 2\sqrt{22} \cdot \frac{10\sqrt{34}}{7} \cdot \sin \angle ECK}{2}$$

$$S_{\triangle CKE} = \sqrt{22} \cdot \frac{10\sqrt{34}}{7} \cdot \frac{\sqrt{171}}{\sqrt{187}} = \frac{10\sqrt{127908}}{7\sqrt{187}} = \frac{20\sqrt{31977}}{7\sqrt{187}} = \frac{60\sqrt{3553}}{7\sqrt{187}}.$$

Ответ:

$$a) P_{\triangle CKE} = \frac{10\sqrt{34} + 4\sqrt{342} + 14\sqrt{22}}{7}; S_{\triangle CKE} = \frac{60\sqrt{3553}}{7\sqrt{187}};$$

$$б) P_{\triangle CEK} = 10 + 10\sqrt{3}; S_{\triangle CKM} = 25\sqrt{2}$$

$$в) P_{\triangle CBE} = 10\sqrt{2} + \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; S_{\triangle CBE} = \frac{100}{\sqrt{3}}$$

$$г) P_{\triangle CKM} = 20 + 10\sqrt{2}; S_{\triangle CKM} = 50.$$